Matematisk Analys IT2

PROBLEM SOM ÄR TREVLIGA NOG ATT KUNNA FÖREKOMMA PÅ EN TENTAMEN

Version 2, 1 oktober

1. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}\arctan\frac{x}{2} & x<2\\ ax+b & x\geq 2\end{cases}$ blir kontinuerlig och deriverbar.

2. Skissera grafen till $y=e^{\frac{1}{x-1}}$

3. I vilka punkter är funktionen $f(x)=\left|\cos x^2\right|,\quad |x|\leq\sqrt{3p}$ deriverbar?

4. Bestäm alla punkter där kurvan $x^2y^2+xy=2$ har en tangent med riktningskoefficient $=-1$

5. Beräkna gränsvärdena $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ samt $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}$

6. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x)=\arccos\dfrac{x+1}{x-1}$

7. Två sidor i en triangel är respektive 4 och 5 meter långa, och vinkeln mellan dem ökar med en hastighet av 0.06 radianer per sekund. Avgör hur snabbt triangelns area ökar när samma vinkel är $=\dfrac{p}{3}$

8. En våg med längden L i djupt vatten rör sig med hastigheten $v=K\sqrt{\dfrac{L}{C}+\dfrac{C}{L}}$ där K och C är positiva konstanter. Vid vilken längd blir hastigheten så liten som möjligt och vad blir denna hastighet?

9. Visa att olikheten $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ gäller för alla $x>0$

10. Bestäm inversen till funktionen $f(x)=\sin(\arctan x)$. Bestäm också definitions och värdemängd till inversen.

11. Beräkna följande integraler:

$$\int\frac{dt}{t^2-1}\qquad\int_0^4\frac{dx}{2+\sqrt{x}}\qquad\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx\qquad\int_0^1 xe^{-2x}dx$$

12. Kurvan $y=ax-x^2,\quad 0\leq x\leq a$, där a är en positiv konstant, roterar dels kring x-axeln, dels kring y-axeln. Bestäm a så att de båda uppkomna rotationsvolymerna är lika stora.

13. Visa att $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^2+\ln x}$ är konvergent.

14. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25 = 0$ har roten $z = 2 + i$. Lös ekvationen fullständigt.

15. Bestäm i vilken punkt funktionen $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t \; dt, \quad 0 \le x \le 2p$ antar sitt största värde.

16. Visa att om $x > 1$ är $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt < x - 1$

17. Bestäm konstanten a så att $\int_1^2 (x-a) \ln x dx = 0$

18. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då kurvan $y = e^{-x^2}$, $0 \le x \le \infty$ roterar kring x-axeln.

19. Ett klot med radien R delas i två delar av ett plan med avståndet a från medelpunkten. Beräkna de bägge delarnas volymer.

20. Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = \frac{1}{x}$ samt $y = \frac{3}{2 + x^2}$

21. Lös differentialekvationerna

$$y' = e^{x+y}, \qquad x^2 yy' = 1 + x^2,\ y(2) = 2, \qquad (1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2) \arctan x,\ y(1) = 2$$

22. Lös integralekvationen $xf(x) = x + \int_1^x \frac{t}{1+t} f(t) dt, \quad x \ge 1$

23. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x(\cos 2x - 1)}$

24. Ekvationen $z^4 - z^3 + 7z^2 - 9z - 18 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.