

# Matematisk Analys II

## SVAR TILL ÖVNINGSTENTAMEN 1

1. a) Beräkna integralen  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 + 4x + 10}$

$$\text{Svar: } \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}}{4}$$

b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\ln x}}$

$$\text{Svar: } 1$$

c) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

$$\text{Svar: } \frac{1}{3}$$

2. Bestäm inversen till funktionen  $f(x) = (1 + e^{-x})^2$   
Bestäm också inversens definitions- och värdemängd.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = -\ln(\sqrt{x} - 1), \quad D_{f^{-1}} = \{x; x > 1\}, \quad V_{f^{-1}} = \mathfrak{R}$$

3. Beräkna volymen av den kropp vars bas utgörs av området  $\{(x, y); x^2 \leq y \leq 1\}$  och som är format så att tvärsnitt i rät vinkel mot y-axeln bildar liksidiga trianglar.

$$\text{Svar: } V = \int_{y=0}^1 dV = \int_{y=0}^1 \left( \begin{array}{c} \text{triangel} \\ \text{area} \end{array} \right) dy = \int_{y=0}^1 \sqrt{3}x^2 dy = \int_0^1 \sqrt{3}y dy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. a) Förenkla uttrycket  $\frac{(i - \sqrt{3})^5}{(1 - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^3}$  Svaret skall skrivas på formen  $a + ib$ .

b) Lös ekvationen  $z^5 = 2 + 2i$

$$\text{Svar: } z_n = 2^{1/5} e^{i \frac{2\pi n + \arctan 1}{5}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

5. a) Lös ekvationen  $y'' - 9y = \sin x$

$$\text{Svar: } y = Ae^{3x} + Be^{-3x} - \frac{\sin x}{10}$$

b) Lös ekvationen  $xy' - y = x^3 \sin x$ ,  $y(0) = 1$

*Svar: Den allmänna lösningen blir  $y = x \sin x - x^2 \cos x + Cx$ . Till denna kan man inte foga det givna begynnelsevillkoret, ty  $y(0) = 0$  för alla värden på  $C$ . Lösning saknas alltså.*