Matematisk Analys IT2

SVAR TILL ÖVNINGSTENTAMEN 2

1. **a)** Ekvationen $x^4+2x^3-6x^2-22x+65=0$ har en rot $x=2+i$.
Lös ekvationen fullständigt.

Svar: $x=2\pm i,\quad x=-3\pm 2i$

b) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $e^z=2-3i$

Svar: $z=\dfrac{\ln 13}{2}+i\left(2np-\arctan\dfrac{3}{2}\right)$

2. Låt $f(x)=e^x+x-2$
Visa att $f(x)$ är inverterbar med invers $f^{-1}(x)$.
Beräkna $f^{-1}(-1)$ och ${f^{-1}}'(-1)$.
Lös ekvationen $f(x)=f^{-1}(x)$ *(Ledning: rita funktionernas grafer)*

Svar: utnyttja att f är definierad för alla x samt att $f'>0$.
$f^{-1}(-1)=0$ *och* ${f^{-1}}'(-1)=\dfrac{1}{2}$
Eftersom de bägge funktionskurvorna är varandras spegelbild i linjen $x=y$ *skär de varandra bara i den linjen. Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med* $f(x)=x \iff x=\ln 2$

3. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen

$$f(x)=\arcsin\frac{1-2x}{x}$$

Svar: $D_f=\left\{x;\ \dfrac{1}{3}\le x\le 1\right\},\quad V_f=\left\{x;\ -\dfrac{p}{2}\le x\le\dfrac{p}{2}\right\}$

4. Bestäm alla funktioner f som är deriverbara i $0 < x < 1$ och som har egenskapen att tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ skär x-axeln i punkten $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ för varje a i intervallet $0 < a < 1$.

Svar: differentialekvation: $(1 - x^2) f' + xf = 0$ *med lösningar* $f(x) = C\sqrt{1 - x^2}$

5. **a)** Visa att $\int_0^{\infty} (2 + \sin x) e^{-x}\, dx$ är konvergent.

Svar: utnyttja att $2 + \sin x \leq 3$ *samt att* $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$ *är konvergent.*

b) Låt $f(x) = \int_0^x \sin(2pe^{-t})\, dt, \quad x \geq 0$. I vilken punkt antar $f(x)$ sitt minsta värde?

Svar: $f'(x) = \sin(2pe^{-x}) < 0$ *då* $0 < x < \ln 2$ *och* > 0 *då* $x > \ln 2$
Det följer att $f(x)$ *antar sitt minsta värde i* $x = \ln 2$