Matematisk analys IT2 (MVE 045)
Övningstentamen 2014-09-27
Lösning

---

1 (a) Beräkna derivatan av $f(x) = e^{\sqrt{x}}/\sin(x)$.

Med användning av kvotregeln och kedjeregeln får vi

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x) - e^{\sqrt{x}}\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Vi faktoriserar uttrycket och får

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \to \frac{2+2}{2-1} = 4, \qquad x \to 2.$$

(c) Låt f vara en inverterbar funktion. Bestäm inversen till funktionen $g(x) = f(x+2)+3$. Svaret bör innehålla f^{-1}.

En ekvivalent problemformulering är att lösa ekvationen

$$\begin{aligned} g(x) = y \quad &\iff \quad f(x+2) = y-3 \quad \iff \quad x+2 = f^{-1}(y-3) \\ &\iff \quad x = f^{-1}(y-3) - 2. \end{aligned}$$

Vi kan här läsa av att $g^{-1}(y) = f^{-1}(y-3) - 2$ eller, om man så vill, $g^{-1}(x) = f^{-1}(x-3) - 2$.

(d) Funktionen $f(x) = (x^2+3x)/(x+1)$ har en asymptot då $x \to \infty$. Bestäm denna.

Om $y = kx + m$ är en asymptot så är

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$$

och

$$m = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Asymptoten är alltså $y = x + 2$.

2 Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x) = |x|(x-2)$ på intervallet $[-1, 3]$.

Eftersom $f(x) = \pm(x^2-2x)$ är $f'(x) = \pm(2x-2)$ där vi väljer plustecknet för $x > 0$ och minustecknet för $x < 0$. Derivatans enda nollställe är alltså $x = 1$. Observera också att f inte är deriverbar då $x = 0$. Vi vet då att max och min måste antas i någon av de fyra intressanta punkterna 1 (kritisk punkt), 0 (singulär punkt), -1 eller 3 (randpunkter). Vi beräknar

$$f(1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = -3, \quad f(3) = 3.$$

En jämförelse av dessa värden ger max $= 3$ och min $= -3$.

3 Ange om följande påståenden är *sanna* eller *falska*. Enbart svar räcker. Rätt svar ger 1 poäng, fel svar -2 poäng, dock kan man ej få mindre än 0 poäng totalt. Man behöver ej svara på alla uppgifter.

(a) Om en funktion inte är udda så är den jämn.
Detta är FALSKT. Funktionen $f(x) = x + 1$ är varken udda eller jämn.

(b) Om en funktion är kontinuerlig så är den deriverbar.
Detta är FALSKT. Funktionen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig men ej deriverbar.

(c) Funktionen $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, har en invers.
Detta är SANT. Funktionen är strängt växande, och kan alltså ej anta samma värde i två olika punkter. Därmed finns en invers.

(d) Definitionen av att $f(x)$ går mot 0 då x går mot 0 är följande: För alla tal $\delta > 0$ finns ett tal $\varepsilon > 0$ så att om $0 < |x| < \delta$ så är $|f(x)| < \varepsilon$.
Detta är FALSKT. Den korrekta definitionen är: För alla tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att om $0 < |x| < \delta$ så är $|f(x)| < \varepsilon$. För ett mer konkret exempel, låt $f(x) = 1$ för alla x. Denna funktion uppfyller den givna "definitionen"; man kan nämligen för varje δ välja $\varepsilon = 2$. Men $f(x)$ går inte mot 0 då x går mot 0.