Lösningsförslag till övningstentamen i Matematisk analys IT2 (MVE045), 2015-09-26

Klockan 08.30–10.30
Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: Ovningstentamen ger max 10 poäng. Dessa omvandlas till max 4 bonuspoäng påtentamina under läsåret (t.o.m. augusti 2016). 9-10 poäng ger 4 bonuspoäng, 7-8 poäng ger 3 bonuspoäng, 5-6 poäng ger 2 bonuspoäng och 2-4 poäng ger 1 bonuspoäng.
Om ej annat anges krävs fullständig lösning; enbart svar ger normalt inga poäng.

1. (a) Vi har $2 + \sin x \geq 1$ för alla x, så

$$\lim_{x\to\infty} (2 + \sin x) \ln x \geq \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty,$$

alltså ett oegentligt gränsvärde.

(b) Vi börjar med att förenkla genom att förlänga med konjugatkvantiteten och förkorta med x^4, alltså

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x^4}-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3(\sqrt{x^2+x^4}+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x^4}+1}.$$

Då vi har

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x^4}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2},$$

men

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x^4}+1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-\sqrt{1+x^2}+1} = -\infty$$

saknas gränsvärde.

2. Sätt $x = -\ln t$. Vi får att $x \to \infty$ motsvarar $t \to 0^+$. Då har vi

$$0 = \lim_{x\to\infty} x^a/e^x = \lim_{t\to 0^+} (-\ln t)^a t = \lim_{t\to 0^+} \left(-\ln(t) t^{1/a}\right)^a,$$

vilket ger

$$0 = -0^{1/a} = \lim_{x\to 0^+} \ln(t) t^{1/a}.$$

Med $b = 1/a$ blir det precis vad vi vill visa.

3. (a) Produkt- och kedjereglerna ger $f'(x) = \sin\left(x^2\right) + 2x^2\cos\left(x^2\right)$. Vi får $f'\left(\sqrt{3\pi/4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\frac{3\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-3\pi}{2\sqrt{2}}$.

(b) Först observerar vi att $x^x = 2^x$ då $x = 2$, så $g(x)$ är kontinuerlig. (Annars hade vi kunnat konstatera att derivatan inte existerar.)
Högerderivatan av $g(x)$ då $x = 2$ ges av $\mathrm{D}x^x|_{x=2} = x^x(1+\ln x)|_{x=2} = 4(1+\ln 2)$.
Vänsterderivatan av $g(x)$ då $x = 2$ ges av $\mathrm{D}2^x|_{x=2} = 2^x \ln 2|_{x=2} = 4\ln 2$.
Då vi har olika höger- och vänsterderivator i $x = 2$ existerar inte derivatan i den punkten.

4. (a) Vi observerar att täljaren är positiv för alla x, och att nämnaren är positiv för $x < -1$ samt $x > 2$, och negativ för $x \in (-1, 2)$.

Då $x \to -\infty$ går täljaren mot noll och nämnaren mot ∞, varför $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$.

Därtill har vi att täljaren växer snabbare än nämnaren då $x \to \infty$, varför $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

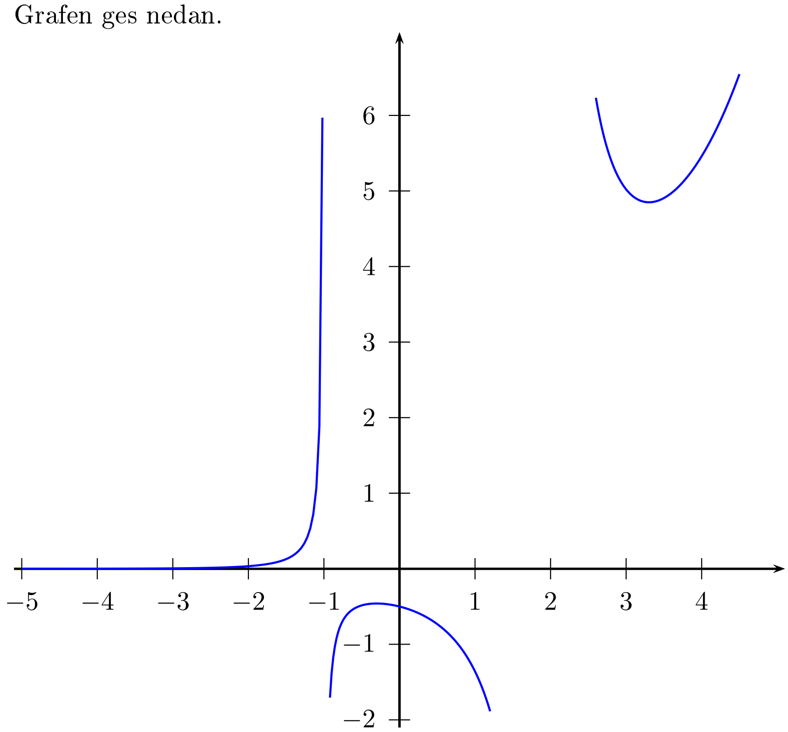
Vi har $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 3x - 1)e^x}{(x^2 - x - 2)^2}$, varför $f'(x) = 0$ medför $x^2 - 3x - 1 = 0$. Vid lokala extremvärden måste x uppfylla denna ekvation, d.v.s. $x = x_1 = \left(3 - \sqrt{13}\right)/2$ eller $x = x_2 = \left(3 + \sqrt{13}\right)/2$. Vi observerar speciellt att $x_1 \in (-1, 2)$ och $x_2 > 2$.

I stort sett bör bilden nu vara klar. I intervallet $(-\infty, -1)$ växer f från 0 mot ∞. I intervallet $(-1, 2)$ växer f från $-\infty$ tills den i x_1 når sitt lokala maximum $f(x_1)$ varefter den åter avtar mot $-\infty$. I intervallet $(2, \infty)$ avtar f från ∞ tills den i x_2 når sitt lokala minimum $f(x_2)$ varefter den åter växer mot ∞.

Det enda lokala minimat är $(x_1, f(x_1))$ och det enda lokala maximat är $(x_2, f(x_2))$. Inga globala extremvärden förekommer.

(b) Vi har uppenbarligen en horisontell asymptot $y = 0$ då x går mot $-\infty$. Vidare har vi två vertikala asymptoter i $x = -1$ och $x = 2$. Genom att observera att $f(x)/x \to \infty$ då $x \to \infty$ ser vi att ingen asymptot förekommer då $x \to \infty$.

(c) Grafen ges nedan.



För poäng ska alla tre asymptoter ha hamnat rätt, de lokala extremvärdena ska ligga i rätt intervall och vara placerade på rätt sida x axeln, och lutningen ska ha rätt tecken överallt.

Vid fel i lösning av deluppgifterna a) och b) ska skissen istället stämma med de beräkningar som gjorts där. Vid fel från deluppgifterna a) och b) som i för stor utsträckning förenklat skissandet kan inga poäng fås på denna deluppgift.