Lösningsförslag till övningstentamen i Matematisk analys IT2 (MVE045), 2016-09-24

Klockan 08.30–10.30
Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: Övningstentamen ger max 10 poäng. Dessa omvandlas till max 4 bonuspoäng på tentamina under läsåret (t.o.m. augusti 2017). 9-10 poäng ger 4 bonuspoäng, 7-8 poäng ger 3 bonuspoäng, 5-6 poäng ger 2 bonuspoäng och 2-4 poäng ger 1 bonuspoäng.
Om ej annat anges krävs fullständig lösning; enbart svar ger normalt inga poäng.

1. Avgör om följande gränsvärden existerar, och beräkna dem om så är fallet.

   (a) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9-x}$. (1 p)
   Lsg: Gränsvärdet kan beräknas enligt

$$\frac{\sqrt{x}-3}{9-x} = -\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{\sqrt{x}+3} \to -\frac{1}{6} \text{ då } x \to 9.$$

   Alternativ kan det beräknas enligt

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x} &= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(9-x)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-9}{(9-x)(\sqrt{x}+3)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}+3} \to -\frac{1}{6} \text{ då } x \to 9.\end{aligned}$$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(1+x^8)}$. (1 p)
   Lsg: För att hantera det formellt använder vi instängningssatsen, enligt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(1+x^8)} &\geq \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(2x^8)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(2) + 8\ln(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{x^4}{2^x}}{2^2 + \frac{\ln(2)}{2^x} + 8\frac{\ln(x)}{2^x}} = \frac{1+0}{4+0+0},\end{aligned}$$

   och

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(1+x^8)} &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(x^8)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + 8\ln(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{x^4}{2^x}}{2^2 + 8\frac{\ln(x)}{2^x}} = \frac{1+0}{4+0},\end{aligned}$$

   varför gränsvärdet måste vara 1/4.

Om man tillåter sig vara mindre formell och skriver

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^4}{2^{x+2} + \ln(1+x^8)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{x^4}{2^x}}{2^2 + \frac{\ln(1+x^8)}{2^x}} = \frac{1+0}{4+0},$$

så måste man kommentera på att den där ettan i $\ln(1+x^8)$ inte kommer att spela någon roll då $x \to \infty$, så att $\ln(1+x^8)$ kan betraktas som $8\ln(x)$.

2. Låt $g(x) = |x(x-2)^3|$.

   (a) Beräkna $g'(0)$ eller visa att g saknar derivata i 0. (1 p)
   Lsg: Bilda funktionen $f(x) = x(x-2)^3$, och notera att

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0, \\ -f(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ f(x), & 2 \leq x. \end{cases}$$

   Vi har $f'(x) = (x-2)^3 + 3x(x-2)^2 = (4x-2)(x-2)^2$, vilket ger $f'(0) = -8$. Därmed är vänsterderivatan av g i $x = 0$ inte samma som högerderivatan (-8 respektive 8), så derivatan existerar ej.

   (b) Beräkna $g'(2)$ eller visa att g saknar derivata i 2. (1 p)
   Lsg: Vi startar som i (a)-uppgiften, men får $f'(2) = 0$. Därmed är vänsterderivatan av g i $x = 0$ samma som högerderivatan (0 respektive 0), så $g'(2) = 0$.

3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2kx + 2k^2, & x < k, \\ 2k - x, & x \geq k \end{cases}$$

vara en funktion. Bestäm alla k sådana att $f(x)$ är

   (a) kontinuerlig. (1 p)
   Lsg: Att f är kontinuerlig på $\mathbb{R} \setminus \{k\}$ är uppenbart. För att f ska vara kontinuerlig även i k krävs att $x^2 - 2kx + 2k^2 = 2k - x$ då $x = k$, det krävs alltså att $k^2 - 2k^2 + 2k^2 = 2k - k \Leftrightarrow k^2 = k$, vilket gäller då och endast då $k = 0$ eller då $k = 1$. Alltså är f kontinuerlig om och endast om $k = 0$ och för $k = 1$.

   (b) injektiv (ett-till-ett). (1 p)
   Lsg: Vi noterar först att $x^2 - 2kx + 2k^2 = (x-k)^2 + k^2$, med $D_x(x-k)^2 + k^2 = 2(x-k)$, vilket visar att f är avtagande på intervallet $x < k$. Att f är avtagande på intervallet $x \geq k$ är uppenbart. Eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ krävs nu att $(x-k)^2 + k^2 \geq 2k - x$ då $x = k$ för att f ska vara injektiv (då blir f avtagande för alla x). Det villkoret förenklas till $k^2 \geq k$, vilket gäller precis för alla $k \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)$.

4. Låt $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(a) Ange alla asymptoter för f. (2 p)

Lsg: I och med att $1+x^2>0$ förekommer ingen nolldivision, och då täljaren är kontinuerlig är f kontinuerlig. Vi har alltså inga vertikala asymptoter.

Vi söker sneda asymptoter, och börjar söka då $x\to-\infty$ enligt

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0,$$

och

$$\begin{aligned}m=\lim_{x\to-\infty}f(x)-kx&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{-\sqrt{1/x^2}\sqrt{1+x^2}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{-\sqrt{1/x^2+1}}=0-1=-1.\end{aligned}$$

Vi har funnit en horisontell asymptot $y=-1$. Motsvarande sökning då $x\to\infty$ ger den horisontella asymptoten $y=1$. Inga andra asymptoter kan förekomma.

(b) Hitta alla stationära punkter för f och bestäm deras karaktär (terasspunkter eller lokala/globala maximum/minimum). (1 p)

Lsg: Vi beräknar

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1+x^2-(1+x)x}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1-x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Vi ser att $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, vilket alltså är vår enda stationära punkt, med $f(1)=\sqrt{2}$. Då vi har asymptoterna kan vi se att f beter sig enligt följande tabell:

	$-\infty$		1		∞
f	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Vi har alltså ett globalt maximum för f i $x=1$.

(c) Skissa f. (1 p)

Lsg: Nej, jag orkar inte rita i LaTeX... För att få poäng ska man ha fått med de båda asymptoterna och det globala maximat.

Notera att felaktigheter i tidigare deluppgifter kan påverka vad som anses vara korrekt lösning i denna uppgift, och kan göra uppgiften omöjlig att lösa, eller förenkla den så pass mycket att poäng ej kan erhållas.