Lösningar för dugga i MVE045 Matematisk analys 2017-09-21 kl. 13:00–15:00

1. Faktorn $x^2 + 2$ är ett polynom utan reella nollställen. Polynomdivision ger

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\; x^2 - 2x - 4 \\
\hline
x^2 + 2 & x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 8 \\
 & -x^4 \qquad\; - 2x^2 \\
\hline
 & \quad - 2x^3 - 4x^2 - 4x \\
 & \qquad 2x^3 \qquad\; + 4x \\
\hline
 & \qquad\quad - 4x^2 \qquad - 8 \\
 & \qquad\qquad 4x^2 \qquad + 8 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

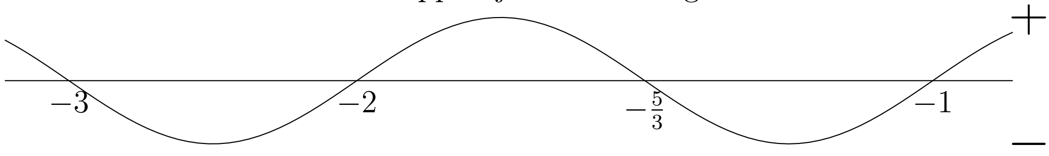
Detta innebär att $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = (x^2 - 2x - 4)(x^2 + 2)$. Faktorn $x^2 - 2x - 4$ är ett polynom med nollställen $x = 1 \pm \sqrt{5}$ (dessa hittas med pq-formeln eller kvadratkomplettering).

Svar: De reella nollställena till $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ är $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

2. Vi flyttar över allt till samma sida, sätter på gemensamt bråkstreck, och faktoriserar:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{2}{x+3} \iff \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+3} &> 0 \iff \\
\frac{(x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} &> 0 \iff \\
\frac{(x^2+5x+6) + (x^2+4x+3) - 2(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} &> 0 \iff \\
\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} &> 0.
\end{aligned}
$$

Uttrycket i vänsterledet kommer att byta tecken i punkterna $x = -3$, $x = -2$, $x = -5/3$, samt $x = -1$. Eftersom vänsterledet är positivt ($= 5/6$) för $x = 0$ kan vi nu utan alltför stor möda rita upp följande teckenfigur:



(OBS! Teckenfiguren gör *inte* anspråk på att visa hur *grafen* ser ut!)

Svar: Olikheten gäller om $x < -3$ eller $-2 < x < -5/3$ eller $-1 < x$.

3. Eftersom funktionen är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ finns inga lodräta asymptoter. Vi börjar därför med att undersöka om det finns en asymptot $y = kx + m$ när $x \to \infty$. För en sådan ges k av

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3xe^x + x - e^x - 1)/x}{e^x + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x + 1 - e^x/x - 1/x}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(3 + e^{-x} - 1/x - e^{-x}/x)}{e^x(1 + e^{-x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + e^{-x} - 1/x - e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = 3,
\end{aligned}$$

varpå m ges av

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{e^x + 1} - 3x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(3xe^x + x - e^x - 1) - (3xe^x + 3)}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - e^x - 4}{e^x + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(xe^{-x} - 1 - 4e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-x} - 1 - 4e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -1.
\end{aligned}$$

För en asymptot $y = kx + m$ när $x \to -\infty$ gäller att

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3xe^x + x - e^x - 1)/x}{e^x + 1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x + 1 - e^x/x - 1/x}{e^x + 1} = 1,
\end{aligned}$$

efter vilket m beräknas som

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{e^x + 1} - x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(3xe^x + x - e^x - 1) - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x - e^x - 1}{e^x + 1} = -1.
\end{aligned}$$

Svar: Då $x \to \infty$ har $f(x)$ asymptoten $y = 3x - 1$, och när $x \to -\infty$ har $f(x)$ asymptoten $y = x - 1$.

4. Funktionen $f(x)$ kan ses som $f(x) = \ln|u|$ med $u = \ln v$ och $v = x^2 + 2$. Kedjeregeln ger att

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

och alltså är

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
&= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} \cdot 2x = \frac{1}{\ln(x^2 + 2)} \cdot \frac{1}{x^2 + 2} \cdot 2x \\
&= \frac{2x}{(x^2 + 2)\ln(x^2 + 2)}.
\end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 2)\ln(x^2 + 2)}$.

5. Funktionen är kontinuerlig och definierad på ett slutet intervall, så ett största och ett minsta värde antas garanterat (och detta sker i stationära punkter, ändpunkter eller punkter där derivatan är odefinierad).

Derivering ger $f'(x) = 2x - 4x^3$ och $f''(x) = 2 - 12x^2$. Stationära punkterna ges av $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2x^2) = 0$, alltså då $x = 0$ och $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (alla dessa ligger i intervallet $[-1, 2]$).

Då $x = 0$ är $f''(0) = 2 > 0$, vilket ger ett lokalt minimum. Då $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ är $f''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 - 12(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 2 - \frac{12}{2} = -4 < 0$, vilket ger lokala maxpunkter med funktionsvärde $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig är värdemängden det slutna intervallet mellan minsta och största värdet. Vi undersöker intervallets ändpunkter $x = -1$ och $x = 2$, i vilka vi har $f(-1) = (-1)^2 - (-1)^4 = 0$ och $f(2) = 2^2 - 2^4 = 4 - 16 = -12$. Minsta värde är tydligen -12 som antas för $x = 2$ och största värde är tydligen $\frac{1}{4}$ för $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, så värdemängden till f är $V_f = [-12, \frac{1}{4}]$.

Svar: De stationära punkterna är den lokala minpunkten $x = 0$ och de lokala maxpunkterna $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Funktionens värdemängd ges av $V_f = [-12, \frac{1}{4}]$.