1. (a) På grund av den första logaritmen måste alla eventuella lösningar x vara (strikt) större än noll. Absolutbeloppet i den andra logaritmen gör att vi får dela upp undersökningen i två fall.

Fallet $1 - 2x > 0$*:* Ekvationen blir $2\ln x - \ln(1-2x) = 0$, och vi får

$$2\ln x - \ln(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) - \ln(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{1-2x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2}{1-2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Här är $x = -1-\sqrt{2}$ en falsk lösning, medan $x = -1+\sqrt{2}$ duger.

Fallet $1 - 2x < 0$*:* Ekvationen blir $2\ln x - \ln(2x-1) = 0$, och vi får

$$2\ln x - \ln(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) - \ln(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

vilket fungerar i ursprungliga ekvationen.

Svar: Lösningarna är $x = \sqrt{2} - 1$ och $x = 1$.

(b) Vi börjar med att kvadratkomplettera polynomet i vänsterledet:

$$z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{3+3i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3+3i}{2}\right)^2 + 5i = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(z - \frac{3+3i}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(9 + 18i + 9i^2) + 5i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{3+3i}{2}\right)^2 = -\frac{i}{2}.$$

Låt nu $w = z - \frac{3+3i}{2} = a + bi$. Eftersom $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = -\frac{i}{2}$ får vi, genom att identifiera realdel respektive imaginärdel, att $a^2 - b^2 = 0$ samt $2ab = -\frac{1}{2}$. Det måste även gälla att $|w|^2 = \left|-\frac{i}{2}\right|$, vilket ger att $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$. Nu blir

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = \dfrac{1}{2} \\ 2ab = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = \dfrac{1}{2} \\ 2b^2 = \dfrac{1}{2} \\ 2ab = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\dfrac{1}{2} \\ b = \pm\dfrac{1}{2} \\ 2ab = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

där $2ab < 0$ informerar oss om att a och b måste ha olika tecken. Möjliga w är därför $w_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ och $w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, vilka i sin tur ger lösningarna $z_1 = 2 + i$ och $z_2 = 1 + 2i$.

Svar: Lösningarna är $z_1 = 2 + i$ och $z_2 = 1 + 2i$.

2. (a) Vi förlänger med konjugatet, och får därvid

$$L = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - \sqrt{5+2x+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - (\sqrt{5+2x+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{5+2x+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x^2 - (5 + 2x + x^2)}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{5+2x+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4+2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{5+2x+x^2}}.$$

Eftersom $\sqrt{x^2} = |x|$ får vi, om vi fortsätter,

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x(4/x+2)}{|x|\sqrt{1/x^2+1}+|x|\sqrt{5/x^2+2/x+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x(4/x+2)}{-x\sqrt{1/x^2+1}-x\sqrt{5/x^2+2/x+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4/x+2}{\sqrt{1/x^2+1}+\sqrt{5/x^2+2/x+1}} \\
&= \frac{0+2}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0+0+1}} = 1.
\end{aligned}
$$

Svar: Gränsvärdet är 1.

(b) Sätt $f(t) = \sqrt{1+2t} = (1+2t)^{\frac{1}{2}}$. Vi får då att

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (1+2t)^{\frac{1}{2}} &&\Rightarrow \quad f(0) = 1, \\
f'(t) &= \frac{1}{2}(1+2t)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 &&\Rightarrow \quad f'(0) = 1, \quad \text{och} \\
f''(t) &= -\frac{1}{2}(1+2t)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2 &&\Rightarrow \quad f''(0) = -1.
\end{aligned}
$$

Detta innebär att $\sqrt{1+2t} = 1+t-\frac{1}{2}t^2+t^3B_1(t)$, där $B_1(t)$ är begränsad nära $t=0$. På motsvarande sätt får vi att $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+t^3B_2(t)$ för någon funktion $B_2(t)$ som är begränsad nära $t=0$.

Det efterfrågade gränsvärdet kan nu beräknas:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to0}\frac{2t^2}{e^t-\sqrt{1+2t}} &= \lim_{t\to0}\frac{2t^2}{1+t+\frac{1}{2}t^2+t^3B_2(t)-(1+t-\frac{1}{2}t^2+t^3B_1(t))} \\
&= \lim_{t\to0}\frac{2t^2}{t^2+t^3(B_2(t)-B_1(t))} \\
&= \lim_{t\to0}\frac{2}{1+t(B_2(t)-B_1(t))} = 2.
\end{aligned}
$$

Svar: Gränsvärdet är 2.

3. Analysens huvudsats säger att om $S(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{t}{\ln t}\,dt$ så är $S'(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Eftersom

$$
f(x) = \int_{x^2}^{x^3}\frac{t}{\ln t}\,dt = \int_a^{x^3}\frac{t}{\ln t}\,dt - \int_a^{x^2}\frac{t}{\ln t}\,dt = S(x^3)-S(x^2)
$$

blir

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(S(x^3)-S(x^2)) = 3x^2S'(x^3)-2xS'(x^2) \\
&= 3x^2\frac{x^3}{\ln(x^3)} - 2x\frac{x^2}{\ln(x^2)} = \frac{3x^5}{3\ln x}-\frac{2x^3}{2\ln x} = \frac{x^3(x^2-1)}{\ln x}.
\end{aligned}
$$

Svar: Derivatan blir $f'(x) = \dfrac{x^3(x^2-1)}{\ln x}$.

4. (a) Integranden är en rationell funktion, och täljarens gradtal är lägre än nämnarens. Vi kan alltså direkt börja faktorisera nämnaren och ansätta lämpliga partialbråk:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+x^2} &= \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(1+x^2)}.\end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienter får vi

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=-1. \end{cases}$$

Således är

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^2} &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \left[-\tfrac{1}{x} - \arctan x\right]_R^1 \\ &= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} - \arctan R + 1 + \arctan 1 \\ &= -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Detta visar att integralen är konvergent.

Svar: Integralen är konvergent, och har värdet $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

(b) Vi utnyttjar trigonometriska ettan och får

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\, d\varphi &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)^2 \cos\varphi\, d\varphi = \begin{bmatrix} u = \sin\varphi \\ du = \cos\varphi\, d\varphi \end{bmatrix} \\ &= \int_0^1 (1-u^2)^2\, du = \int_0^1 (1-2u^2+u^4)\, du \\ &= \left[u - \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\, d\varphi = \frac{8}{15}$.

5. Ekvationen är linjär, vilket innebär att allmänna lösningen kommer att vara på formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där $y_h(x)$ är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_p(x)$ är någon (vilken som helst) partikulärlösning till ursprungliga ekvationen.

Vi bestämmer $y_h(x)$ genom att finna rötterna till karakteristiska ekvationen:

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Vi får därför $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ för godtyckliga konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = z(x)e^{-x}$ för någon funktion $z(x)$ som vi strax skall bestämma. Ansatsen ger

$$y_p'(x) = z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x} = (z'(x) - z(x))e^{-x},$$

och

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= z''(x)e^{-x} - z'(x)e^{-x} - z'(x)e^{-x} + z(x)e^{-x} \\ &= (z''(x) - 2z'(x) + z(x))e^{-x}. \end{aligned}$$

Insättning i ursprungliga ekvationen, följt av division med $e^{-x} \neq 0$, ger

$$(z''(x) - 2z'(x) + z(x)) - (z'(x) - z(x)) - 2z(x) = 1 \Leftrightarrow z''(x) - 3z'(x) = 1.$$

Vi kan exempelvis ta $z(x) = -\frac{x}{3}$. En partikulärlösning blir då $y_p(x) = -\frac{x}{3}e^{-x}$.

Svar: Allmänna lösningen är $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - \frac{x}{3}e^{-x}$.