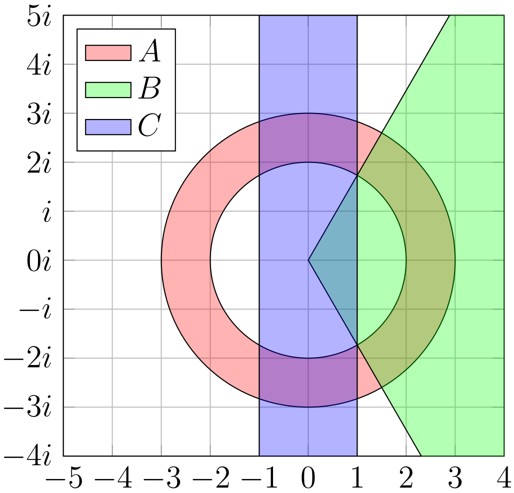
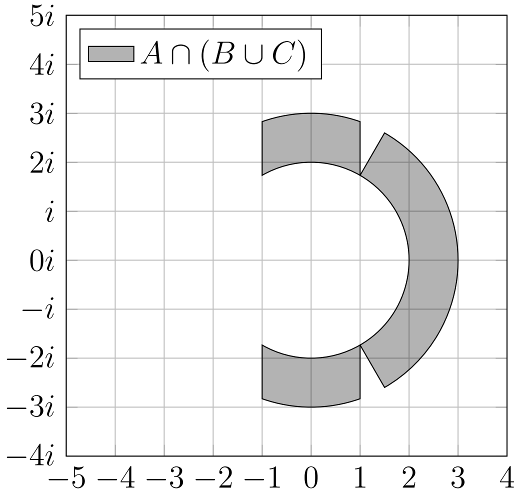
1. (a) Mängden A består av alla z mellan (och inklusive) cirklarna med medelpunkt i origo och radier 2 respektive 3, och är markerad med rött i vänstra figuren nedan. Mängden B består av alla z vars argument är minst $-\frac{\pi}{3}$ och som mest $\frac{\pi}{3}$, och är markerad med grönt. Mängden C består av alla z vars realdel ligger i intervallet $[-1, 1]$, och är markerad med blått i den vänstra figuren nedan.





Mängden $A \cap (B \cup C)$ består av alla z som finns i A och i någon av de andra mängderna. Med hjälp av den vänstra figuren ovan kan vi nu se hur $A \cap (B \cup C)$ ser ut, och denna mängd är markerad med svart i den högra figuren ovan.

Svar: Se den högra figuren ovan.

(b) Tydligen måste $x > 1$ och $x \neq 5$, annars är inte logaritmerna definierade. Absolutbeloppet i den andra logaritmen gör att vi får dela upp undersökningen i två fall.

Fallet $5 - x > 0$*:* Ekvationen blir $2\ln(x-1) + \ln(5-x) = \ln(2x-2)$, och vi får

$$\begin{aligned}
2\ln(x-1) + \ln(5-x) &= \ln(2x-2) \Leftrightarrow \\
2\ln(x-1) + \ln(5-x) &= \ln 2 + \ln(x-1) \Leftrightarrow \\
\ln(x-1) + \ln(5-x) &= \ln 2 \Leftrightarrow \\
\ln((x-1)(5-x)) &= \ln 2 \Leftrightarrow \\
(x-1)(5-x) &= 2 \Leftrightarrow \\
-x^2 + 6x - 5 &= 2 \Leftrightarrow \\
x^2 - 6x + 7 &= 0 \Leftrightarrow \\
x &= 3 \pm \sqrt{2},
\end{aligned}$$

där båda lösningarna uppfyller alla krav och fungerar i den ursprungliga ekvationen.

Fallet $5-x<0$: Ekvationen blir $2\ln(x-1)+\ln(x-5)=\ln(2x-2)$, och vi får

$$\begin{aligned} 2\ln(x-1)+\ln(x-5) &= \ln(2x-2) \Leftrightarrow \\ 2\ln(x-1)+\ln(x-5) &= \ln 2+\ln(x-1) \Leftrightarrow \\ \ln(x-1)+\ln(x-5) &= \ln 2 \Leftrightarrow \\ \ln((x-1)(x-5)) &= \ln 2 \Leftrightarrow \\ (x-1)(x-5) &= 2 \Leftrightarrow \\ x^2-6x+5 &= 2 \Leftrightarrow \\ x^2-6x+3 &= 0 \Leftrightarrow \\ x &= 3\pm\sqrt{6}, \end{aligned}$$

men här uppfyller endast $x=3+\sqrt{6}$ alla krav ($x=3-\sqrt{6}$ uppfyller inte $5-x<0$, och är alltså en falsk rot).

Sammantaget har vi de tre lösningarna $x=3\pm\sqrt{2}$ och $x=3+\sqrt{6}$.

Svar: Lösningarna är $x=3\pm\sqrt{2}$ och $x=3+\sqrt{6}$.

2. (a) Det är bara nämnarens nollställen som inte ingår i D_f. Insättning av $x=\frac{1}{2}$ i nämnarpolynomet ger

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^3+7\left(\frac{1}{2}\right)^2-9\left(\frac{1}{2}\right)+2=\frac{6}{8}+\frac{7}{4}-\frac{9}{2}+2=0.$$

Då nämnaren blir noll för $x=\frac{1}{2}$ måste $\frac{1}{2}\notin D_f$.
Enligt faktorsatsen är $x-\frac{1}{2}$ en faktor i nämnarpolynomet, och polynomdivision med denna ger

$$\begin{array}{r|llll} & & 6x^2 & +10x & -4 \\ \hline x-\frac{1}{2} & 6x^3 & +7x^2 & -9x & +2 \\ & -6x^3 & +3x^2 & & \\ \hline & & 10x^2 & -9x & \\ & & -10x^2 & +5x & \\ \hline & & & -4x & +2 \\ & & & 4x & -2 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Nollställena till $6x^2+10x-4$ ges av $x=-\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{2}{3}}=-\frac{5}{6}\pm\frac{7}{6}$, och alltså är $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},-2,\frac{1}{3}\right\}$.

Svar: $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},-2,\frac{1}{3}\right\}$.

(b) Vi vet redan att nämnaren blir noll för $x=\frac{1}{2}$, så att f är odefinierad där. Vi behöver undersöka täljaren, och insättning av $x=\frac{1}{2}$ i denna ger

$$-2\left(\frac{1}{2}\right)^4+3\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}-\frac{6}{8}+\frac{12}{8}-\frac{8}{8}=0.$$

Vi kan alltså förkorta bort en faktor $x-\frac{1}{2}$ i både täljaren och nämnaren. När vi väl förkortat bort $x-\frac{1}{2}$ kommer vi att kunna sätta in $x=\frac{1}{2}$ i det kvarvarande uttrycket, och därför kommer $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$, och vi behöver alltså bara beräkna det ena.

Om vi delar täljaren med $x - \frac{1}{2}$ får vi

$$\begin{array}{r|l} & -2x^3 + 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline x - \frac{1}{2} & -2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ & \underline{2x^4 - x^3} \\ & 2x^3 - 3x^2 \\ & \underline{-2x^3 + x^2} \\ & -2x^2 + 3x \\ & \underline{2x^2 - x} \\ & 2x - 1 \\ & \underline{-2x + 1} \\ & 0 \end{array}$$

vilket innebär att

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{6x^3 + 7x^2 - 9x + 2} = \\
&= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(6x^2 + 10x - 4\right)} = \\
&= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{6x^2 + 10x - 4} = \\
&= \frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right) - 4} = \\
&= \frac{-\frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{4}{4} + \frac{8}{4}}{\frac{6}{4} + \frac{20}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alltså är $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

Svar: Gränsvärdena är lika, och $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

(c) Ja, eftersom höger- och vänstergränsvärdena för $x = \frac{1}{2}$ är lika (och ändliga) kan vi definiera

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{om } x \in D_f \\ \frac{1}{2} & \text{om } x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

som blir kontinuerlig på $D_f \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3. (a) Vi börjar med att konstatera att vi har att göra med en rationell funktion, där täljarens gradtal är lägre än nämnarens (vi slipper alltså utföra polynomdivision). Faktorisering av integrandens nämnare ger

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 + 2x + 1) = x^2(x + 1)^2,$$

och en lämplig partialbråksansats är därför

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 + 2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2} = \\
&= \frac{Ax(x + 1)^2 + B(x + 1)^2 + Cx^2(x + 1) + Dx^2}{x^2(x + 1)^2} = \\
&= \frac{A(x^3 + 2x^2 + x) + B(x^2 + 2x + 1) + C(x^3 + x^2) + Dx^2}{x^2(x + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienter får vi

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + 2B = 2 \\ B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = -2, \end{cases}$$

så

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^3+2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{x} + \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}\right]_1^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \ln 3 + \frac{2}{3}\right) - \left(-1 + \ln 2 + 1\right) = \frac{1}{6} + \ln\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = \frac{1}{6} + \ln\frac{3}{2}.$

(b) Vi använder skivformeln,

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx,$$

som ger volymen V av den rotationskropp som uppstår mellan $x = a$ och $x = b$ då kurvan $y = f(x)$ roteras kring x-axeln.
Med kurvan och gränserna i uppgiften blir volymen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} (x - \sin x)^2\,dx = \pi \int_0^{2\pi} (x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x)\,dx = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} x^2\,dx - 2\pi \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx + \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} - 2\pi\left(\left[-x\cos x\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos x\,dx\right) + \pi \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \\ &= \frac{8\pi^4}{3} - 2\pi\left(-2\pi + \left[\sin x\right]_0^{2\pi}\right) + \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{8\pi^4}{3} + 4\pi^2 + \pi^2 = \frac{8\pi^4}{3} + 5\pi^2. \end{aligned}$$

Svar: Volymen är $V = \dfrac{8\pi^4}{3} + 5\pi^2.$

4. För att förenkla notationen räknar vi dimensionslöst. Låt avståndet från Q till R vara x. Enligt Pythagoras sats ges då avståndet från P till R av $\sqrt{100^2 + x^2}$, och avståndet från R till S ges av $500 - x$. Funktionen

$$T(x) = \sqrt{100^2 + x^2} + \frac{500 - x}{2}, \qquad 0 \le x \le 500$$

ger tiden (som funktion av x) som det tar för personen att ta sig från P till S.

Funktionen $T(x)$ är kontinuerlig och definierad på ett slutet intervall, så den har garanterat ett minsta (och förstås även ett största) värde. Detta antas antingen i en inre stationär punkt eller i intervallets ändpunkter (singulära punkter saknas, då funktionen är deriverbar i intervallets inre). I ändpunkterna har vi

$$T(0) = 350$$

och

$$T(500) = \sqrt{100^2 + 500^2} = 100\sqrt{26} > 500 > T(0).$$

Eventuella stationära punkter är nollställen till derivatan

$$T'(x) = \frac{x}{\sqrt{100^2 + x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{\left(2x - \sqrt{100^2 + x^2}\right)}{2\sqrt{100^2 + x^2}},$$

och vi ser att derivatan är noll precis då

$$2x - \sqrt{100^2 + x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{100^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$3x^2 = 100^2 \Rightarrow x = \frac{100\sqrt{3}}{3}.$$

I denna enda stationära punkt är

$$\begin{aligned} T\left(\frac{100\sqrt{3}}{3}\right) &= \sqrt{100^2 + \left(\frac{100\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{500 - \frac{100\sqrt{3}}{3}}{2} \\ &= \sqrt{100^2 + \frac{1}{3} \cdot 100^2} + 250 - \frac{50\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{200}{\sqrt{3}} + 250 - \frac{50\sqrt{3}}{3} = 250 + 50\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Eftersom $250 + 50\sqrt{3} < 250 + 50\sqrt{4} = 350$ antas funktionens minsta värde då $x = \frac{100\sqrt{3}}{3}$.

Svar: Punkten R skall väljas $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ meter (cirka 57.7 meter) från Q.

5. Problemet är ett begynnelsevärdesproblem beståendes av en lineär första ordningens differentialekvation tillsammans med ett begynnelsevillkor. Vi använder metoden med integrerande faktor för att hitta allmänna lösningen till differentialekvationen, och anpassar sedan (om möjligt) eventuella konstanter som dyker upp så att begynnelsevillkoret uppfylls.

Integrerande faktorn kan väljas till e^{-x}, och denna multipliceras på båda sidor i differentialekvationen för att ge

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = xe^{-2x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = xe^{-2x} \Leftrightarrow e^{-x}y = \int xe^{-2x}\, dx.$$

Multiplikation med e^x på båda sidor, följt av beräkning av integralen, ger

$$\begin{aligned} y(x) = e^x \int xe^{-2x}\, dx &= e^x\Big(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\, dx\Big) = \\ &= e^x\Big(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\Big) = -\frac{1 + 2x}{4}e^{-x} + Ce^x. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger nu att $0 = y(0) = -\frac{1}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$, och alltså blir $y(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1+2x}{4}e^{-x}$.

Svar: Enda lösningen är $y(x) = \dfrac{1}{4}e^x - \dfrac{1 + 2x}{4}e^{-x}$.