Tentamen i MVE045 Matematisk analys 2017-12-19 kl. 14:00–18:00

Examinator: Mårten Wadenbäck
Telefonvakt: Felix Held, telefon: x6792
Hjälpmedel: BETA, ej räknedosa

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 30 poäng, och för betyget fem krävs minst 40 poäng. Resultatet meddelas i LADOK senast 2018-01-12. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

1. (a) Betrakta mängderna $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{3}\}$, och $C = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1\}$. Rita ut A, B, och C i det komplexa talplanet och använd resultatet för att rita ut $A \cap (B \cup C)$. (5p)

(b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som löser ekvationen $2\ln(x-1) + \ln|5-x| = \ln(2x-2)$. (5p)

2. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{-2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{6x^3 + 7x^2 - 9x + 2}$$

med definitionsmängd D_f enligt ”The Domain Convention” (alla reella tal sådana att uttrycket är definierat och ger ett reellt tal).

(a) Kontrollera att $\frac{1}{2} \notin D_f$, och bestäm D_f fullständigt. (3p)

(b) Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$$

och

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x).$$

(5p)

(c) Finns det någon funktion g som är kontinuerlig i $x = \frac{1}{2}$ och som i övrigt uppfyller $g(x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$? (2p)

3. (a) Beräkna integralen

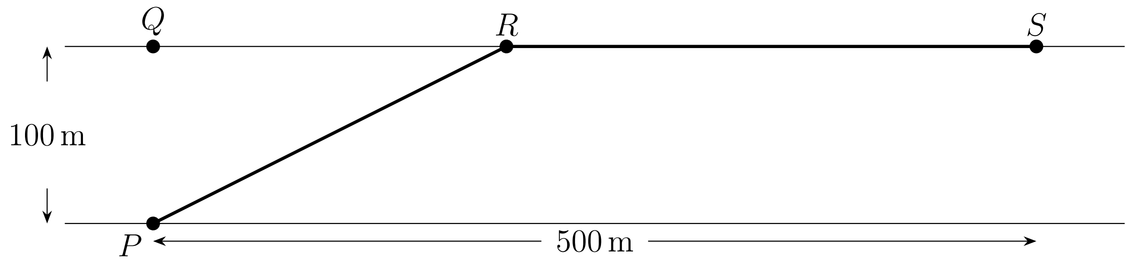
$$\int_1^2 \frac{x^3 + 2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}\,dx.$$

(4p)

(b) Beräkna volymen av den begränsade rotationskropp som uppstår mellan $x = 0$ och $x = 2\pi$ då kurvan $y = x - \sin x$ roteras kring x-axeln. (6p)

Var god vänd!

4. Punkten P ligger på ena stranden av en 100 m bred (och rak) kanal, punkten Q ligger tvärs över kanalen från P, och punkten S ligger 500 m från Q (se figur).



Om en spänstig person börjar med att simma med hastigheten 1 m/s över kanalen från P till en punkt R (mellan Q och S) och sedan går raskt från R till S med hastigheten 2 m/s, hur långt från Q skall R placeras för att personen skall komma fram så fort som möjligt? Bortse från vattnets hastighet i kanalen. (10p)

5. Bestäm alla funktioner $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$\begin{cases} y' - y = xe^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(10p)

Lycka till, och god jul!