1. (a) Vi börjar med att kvadratkomplettera polynomet i vänsterledet:

$$z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{2+i}{2}\right)^2 - \left(\frac{2+i}{2}\right)^2 + 3 + i = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(z - \frac{2+i}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(4+4i-1) + 3 + i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{2+i}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}.$$

Låt nu $w = z - \frac{2+i}{2} = a + bi$. Eftersom $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = -\frac{9}{4}$ får vi, genom att identifiera realdel respektive imaginärdel, att $a^2 - b^2 = -\frac{9}{4}$ samt $2ab = 0$. Det måste även gälla att $|w|^2 = \left|-\frac{9}{4}\right|$, vilket ger att $a^2 + b^2 = \frac{9}{4}$. Nu blir

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -\dfrac{9}{4} \\ a^2 + b^2 = \dfrac{9}{4} \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 0 \\ 2b^2 = \dfrac{9}{2} \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Möjliga w är därför $w_1 = \frac{3i}{2}$ och $w_2 = -\frac{3i}{2}$, vilka i sin tur ger lösningarna $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 - i$.

Svar: Lösningarna är $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 - i$.

(b) På grund av absolutbeloppet börjar vi med att ta reda på när $x^2 - 2x \geq 0$ respektive när $x^2 - 2x < 0$. Vi ser att $x^2 - 2x = x(x-2)$ växlar tecken då $x = 0$ och då $x = 2$, och genom att sätta in valfritt annat x-värde (exempelvis $x = 1$) ser vi att $x^2 - 2x < 0$ precis då $0 < x < 2$, och att $x^2 - 2x \geq 0$ för övriga x. Vi undersöker de två fallen separat.

Fallet $0 < x < 2$*:* Ekvationen blir $-x^2 + 2x + x - 2 = 0$, och vi får

$$-x^2 + 2x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 2,$$

där dock $x = 2$ är en *falsk rot* (ligger utanför intervallet $0 < x < 2$).

Övriga x*:* Ekvationen blir $x^2 - 2x + x - 2 = 0$, och vi får

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x = 2,$$

som båda är giltiga lösningar (ingen av dem ligger i intervallet $0 < x < 2$).

Sammantaget har vi de tre lösningarna $x = -1$, $x = 1$, och $x = 2$.

Svar: Lösningarna är $x = -1$, $x = 1$, och $x = 2$.

2. (a) Låt $f(x) = \ln(1+2x)$ och $g(x) = \sqrt{1-4x}$. Maclaurinpolynomen ges av

$$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2}$$

respektive

$$g(0) + xg'(0) + \frac{x^2 g''(0)}{2}.$$

Derivering och insättning av $x = 0$ ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+2x) && \Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{2}{1+2x} && \Rightarrow f'(0) = 2 \\ f''(x) &= -\frac{4}{(1+2x)^2} && \Rightarrow f''(0) = -4, \end{aligned}$$

så det sökta Maclaurinpolynomet för $\ln(1+2x)$ blir $2x - 2x^2$. På samma sätt får vi

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} && \Rightarrow g(0) = 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{2}(1-4x)^{-1/2} \cdot (-4) = -2(1-4x)^{-1/2} && \Rightarrow g'(0) = -2 \\ g''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (-2)(1-4x)^{-3/2} \cdot (-4) = -4(1-4x)^{-3/2} && \Rightarrow g''(0) = -4, \end{aligned}$$

vilket ger att det sökta Maclaurinpolynomet för $\sqrt{1-4x}$ blir $1 - 2x - 2x^2$.

Svar: De sökta Maclaurinpolynomen blir $2x - 2x^2$ för $\ln(1+2x)$ respektive $1 - 2x - 2x^2$ för $\sqrt{1-4x}$.

(b) Eftersom funktionen $h(x) = \ln(1+2x) + \sqrt{1-4x}$ är kontinuerlig i $x = 0$ gäller att $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = 1$, så $a = 1$.

Svar: Konstantent blir $a = 1$.

(c) Med hjälp av resultatet i (a) vet vi att $\ln(1+2x) = 2x - x^2 + x^3 B_1(x)$ och $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - 2x^2 + x^3 B_2(x)$, där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade i närheten av $x = 0$. Med $a = 1$, enligt (b), får vi

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{1 - \ln(1+2x) - \sqrt{1-4x}}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - (2x - 2x^2 + x^3 B_1(x)) - (1 - 2x - 2x^2 + x^3 B_2(x))}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x + 2x^2 - x^3 B_1(x) - 1 + 2x + 2x^2 - x^3 B_2(x)}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4x^2 - x^3(B_1(x) + B_2(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4 - x(B_1(x) + B_2(x)) = 4, \end{aligned}$$

eftersom $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade nära $x = 0$.

Svar: Gränsvärdet är 4.

3. Vi räknar dimensionslöst för att förenkla notationen. Låt de bortskurna kvadraternas sidor vara x, vilket även blir lådans höjd. Lådans längd blir då $(3-2x)$ och dess bredd blir $(2-2x)$, vilket ger volymen

$$V(x) = x(2-2x)(3-2x) = 6x - 10x^2 + 4x^3, \qquad D_V = [0, 1].$$

Funktionen $V(x)$ är kontinuerlig på D_V och deriverbar överallt utom i ändpunkterna, så $V(x)$ har ett största värde som antas antingen i en inre stationär punkt eller i en ändpunkt.

För att bestämma alla inre stationära punkter löser vi ekvationen $V'(x) = 0$:

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 20x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

I ändpunkterna har vi $V(0) = V(1) = 0$, som inte kan vara maximum, så maximum måste antas för antingen $x = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{7}}{6}$ eller $x = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{7}}{6}$. Enklast är nu att använda andraderivatan, $V''(x) = 24x - 20$, som blir

$$V''\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{7}}{6}\right) = 20 - 4\sqrt{7} - 20 = -4\sqrt{7} < 0$$

respektive

$$V''\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{7}}{6}\right) = 20 + 4\sqrt{7} - 20 = 4\sqrt{7} > 0.$$

Maximum antas alltså för $x = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{7}}{6}$.
(Alternativt, om vi inte vill använda andraderivatan, kan vi helt enkelt bara sätta in de olika x-värdena och se vilket som ger störst volym.)

Svar: Största volymen uppstår då $x = \dfrac{5}{6} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

4. (a) Upprepad partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 e^{-2x}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^2 e^{-2x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{x^2}{2}e^{-2x}\right]_0^a + \int_0^a x e^{-2x}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{a^2}{2}e^{-2a} + \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{a^2}{2}e^{-2a} - \frac{a}{2}e^{-2a} - \left[\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^a \\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{a^2}{2}e^{-2a} - \frac{a}{2}e^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2a} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Svar: Integralens värde är $\dfrac{1}{4}$.

(b) Vi använder skivformeln,

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx,$$

som ger volymen V av den rotationskropp som uppstår mellan $x = a$ och $x = b$ då kurvan $y = f(x)$ roteras kring x-axeln.
Med kurvan och gränserna i uppgiften blir volymen

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx.$$

Här behöver $\dfrac{2}{x(x+1)}$ partialbråksuppdelas. Ansatsen

$$\frac{2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)}$$

leder till $A = 2$ och $B = -2$. Volymen kan nu beräknas:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\
&= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\
&= \pi \Bigg[-\frac{1}{x} - 2\ln x + 2\ln(x+1) - \frac{1}{(x+1)} \Bigg]_1^2 \\
&= \pi \bigg(-\frac{1}{2} - 2\ln 2 + 2\ln 3 - \frac{1}{3} + 1 - 2\ln 2 + \frac{1}{2} \bigg) \\
&= \pi \bigg(-4\ln 2 + 2\ln 3 + \frac{2}{3} \bigg) = \frac{2\pi}{3}(3\ln 3 - 6\ln 2 + 1).
\end{aligned}$$

Svar: Volymen är $V = \dfrac{2\pi}{3}(3\ln 3 - 6\ln 2 + 1)$.

5. Vi börjar med att bestämma allmänna lösningen till $y'' + y' - 2y = 4e^{-3x}$, och anpassar sedan konstanterna som dyker upp så att y både blir begränsad och uppfyller $y(0) = 5$.

Karakteristiska ekvationen är $r^2 + r - 2 = 0$ och har lösningarna $r = -2$ och $r = 1$, så homogena lösningen är $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

Som partikulärlösning ansätter vi $y_{\mathrm{p}}(x) = C_3 e^{-3x}$, som ger $y_{\mathrm{p}}'(x) = -3C_3 e^{-3x}$ och $y_{\mathrm{p}}''(x) = 9C_3 e^{-3x}$. Insatt i ekvationen ger detta att

$$y'' + y' - 2y = 4e^{-3x} \Leftrightarrow 9C_3 e^{-3x} - 3C_3 e^{-3x} - 2C_3 e^{-3x} = 4e^{-3x} \Leftrightarrow C_3 = 1,$$

så vi får $y_{\mathrm{p}}(x) = e^{-3x}$.

Allmänna lösningen är alltså $y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + e^{-3x}$. Eftersom lösningen vi söker är begränsad måste $C_2 = 0$, och villkoret $y(0) = 5$ ger sedan att $C_1 = 4$, så att $y(x) = 4e^{-2x} + e^{-3x}$.

Det efterfrågade gränsvärdet blir

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x} y(x) = \lim_{x\to\infty} e^{2x}(4e^{-2x} + e^{-3x}) = \lim_{x\to\infty} 4 + e^{-x} = 4.$$

Svar: Funktionen är $y(x) = 4e^{-2x} + e^{-3x}$, och det sökta gränsvärdet är 4.