Tentamen: MVE045 Matematisk analys, IT2

2018-10-30, 14.00 – 18.00

Examinator: **Zoran Konkoli, telefon 5480, Mikroteknologi och nanovetenskap – MC2, Chalmers**

Telefonvakt: **Olof Zetterqvist, telefon: 5325**

Hjälpmedel: **bifogad formelblad; ej räknedosa; BETA (lappar för lättare navigering tillåtna)**

Hela tentan ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 8 poäng. För betyget 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyget 4 krävs 30 poäng, och för betyget 5 krävs 40 poäng. Tid och plats för granskning av tentan kommer att anslås på kursens hemsida.

Grupp 1: G frågor

G1 (3p). Definiera konstanten *c* och värdet av funktionen $f(1)$, så att funktionen är kontinuerlig för alla reella tal *x*. Först specificera villkoret för kontinuitet och sedan visa hur du använder villkoret för att hitta *c* och *f(1)*.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-5c + (5-2c)x + 2x^2}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) & x = 1 \end{cases}$$

G2 (3p). Går det att definiera konstanterna *a* och *b* så att funktionen *f(x)* blir deriverbar i *x=2*?

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \leq 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

Om du svarar "ja", ange konstanterna, om du svarar "inte" förklara varför. Visa tydligt hur du tänker.

G3 (3p). Räkna den reella och imaginära delen av det komplexa talet (alltså, hitta x och y sådana att $z = x + iy$):

$$z = \frac{(2-3i)^2}{3+2i}$$

G4 (3p). Räkna derivata av funktionen $f(x) = \arctan\frac{1+2x}{1-2x}$. Svaret går att förenkla avsevärt. Gör det snälla.

G5 (3p). Räkna integralen och specificera vilken typ av integral är detta (bestämt eller obestämt):

$$\int \frac{2x+3}{x^2-16}dx$$

G6 (3p). Räkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + 2x^2}{\sin(3x)}$$

G7 (3p).

(a) Omvandla det komplexa talet $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ till den polära formen $z = re^{iv}$. Specificera r och v.

(b) Omvandla det komplexa talet från den polära formen $z = 3\exp(i\frac{4\pi}{3})$ till formen $z = x + iy$. Notera att $\exp u$ betyder e^u. Specificera x och y.

G8 (3p). Taylor utveckla funktionen kring $x = \pi/2$ upp och inklusive grad 1, där funktionen är

$$f(x) = \ln\left[1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Glöm inte att betona argumentet till O-termen, svaret skall vara i form $f(x) = någonting_1 + O(någonting_2)$ där *någonting₁* och *någonting₂* är polynomer av grad du måste bestämma själv.

Grupp 2: VG frågor

9 **VG1 (4p).** Räkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x[\sin(x) + 2x]}{\sin(x^2)}$$

10 **VG2 (4p).** Hitta derivatan $y'(2)$ för funktionen som är definierat med den implicita formen

$$x^2 + y(x)[\sin y(x) + 1] = 4$$

Notera att ekvationen $x^2 + y\,(\sin y + 1) = 4$ har $x = 2$ och $y = 0$ som en lösning. Just i denna punkt räknar vi derivatan.

11 **VG3 (4p).** Hitta lösningen till differentialekvationen med separations teknik:

$$\frac{f'(x)}{x} = 6f(x)x^4$$

Begynnelse villkoret är $f(0) = 3$.

Grupp 3: MVG frågor

12 **MVG1 (7p).** Lös differentialekvationen

$$2y''(x) - 8y'(x) + 10y(x) = 0$$

med begynnelse villkor $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

13 **MVG2 (7p).** Räkna ytan som man får igenom att rotera grafen definierat med $x = 1 + y^2$ och $y \in [0,1]$. Tips: (a) Rita grafen och identifiera lämpliga gränser i *x*-led. (b) Hitta den explicita formeln för *f(x)*.

· borde ha frågat att studenter ritar ytan, en skiss av vad skall räknas

för nästa gång

Formel blad

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a\log\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right|\right] + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2}du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}du = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + c$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$S = 2\pi\int f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$V = \pi\int f(x)^2 dx$$

■ G1

```
exp = Collect[Expand[(x - c) (2 x + 5)], x]
```

$-5c + (5 - 2c)x + 2x^2$

```
expr = exp /. c → 1
```

$-5 + 3x + 2x^2$

```
Limit[expr / (x - 1), x → 1]
```

7

■ G2

```
f1[x_] := a x^2 + b;
f2[x_] := 2 x + 1;
Solve[{f1[2] == f2[2], f1'[2] == f2'[2]}, {a, b}]
```

$\left\{\left\{a \to \frac{1}{2}, b \to 3\right\}\right\}$

■ G3

```
z = (2 - 3 I)^2 / (3 + 2 I)
```

$-3 - 2i$

■ G4

```
D[ArcTan[(2 x + 1) / (1 - 2 x)], x] // Simplify
```

$\frac{2}{1 + 4x^2}$

■ G5

```
Integrate[(2 x + 3) / (x^2 - 16), x]
```

$\frac{11}{8}\text{Log}[4 - x] + \frac{5}{8}\text{Log}[4 + x]$

■ G6

```
p = Sin [x] + 2 x^2;
q = Sin[3 x];
lhopitalTerms = {D[p, {x, 1}], D[q, {x, 1}]}
```

{4 x + Cos [x], 3 Cos [3 x]}

```
lhopitalTerms /. x → 0
```

{1, 3}

■ G7

```
{AbsArg[1/2 + Sqrt[3] I/2], ExpToTrig[Exp[I 4 Pi/3]]} // TableForm
```

1	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$	

■ G8

```
TrigExpand[Sin[x - Pi/2]]
```

$-\mathrm{Cos}[x]$

```
Series[Log[1 + Sin[x - Pi/2]], {x, Pi/2, 1}]
```

$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+O\left[x-\frac{\pi}{2}\right]^2$

■ VG1

```
p = x (Sin [x] + 2 x);
q = Sin[x^2];
```

```
lhopitalTerms1 = {D[p, {x, 1}], D[q, {x, 1}]}
```

$\{2x+x\,(2+\mathrm{Cos}[x])+\mathrm{Sin}[x],\ 2x\,\mathrm{Cos}[x^2]\}$

```
lhopitalTerms1 /. x → 0
```

{0, 0}

```
lhopitalTerms2 = {D[p, {x, 2}], D[q, {x, 2}]}
```

$\{2\,(2+\mathrm{Cos}[x])-x\,\mathrm{Sin}[x],\ 2\,\mathrm{Cos}[x^2]-4x^2\,\mathrm{Sin}[x^2]\}$

```
lhopitalTerms2 /. x → 0
```

{6, 2}

■ VG2

```
sol = Solve[D[x^2 + y[x] (Sin[y[x]] + 1) == 4, x], y'[x]]
```

$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{2x}{1+\mathrm{Sin}[y[x]]+\mathrm{Cos}[y[x]]\,y[x]}\right\}\right\}$

```
sol /. {x → 2, y[x] → 0}
```

{{y′[2] → -4}}

■ VG3

```
DSolve[{f'[x] == 6 f[x] x^5, f[0] == 3}, f[x], x]
```

$\{\{f[x]\to 3\,e^{x^6}\}\}$

■ MVG1

```
sol = DSolve[{y''[x] - 4 y'[x] + 5 y[x] == 0, y[0] == 2, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

$\{\{y[x]\to 2\,e^{2x}\,(\mathrm{Cos}[x]-2\,\mathrm{Sin}[x])\}\}$

```
Expand[2 (r - (2 + I)) (r - (2 - I))]
```

$10 - 8\,r + 2\,r^2$

```
DSolve[{2 y''[x] - 8 y'[x] + 10 y[x] == 0, y[0] == 2, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

$\{\{y[x] \to 2\,e^{2x}\,(\mathrm{Cos}[x] - 2\,\mathrm{Sin}[x])\}\}$

- MVG2

```
sol = Solve[x == 1 + y^2, y]
```

$\{\{y \to -\sqrt{-1+x}\},\ \{y \to \sqrt{-1+x}\}\}$

```
f[x_] = y /. sol [[2]]
```

$\sqrt{-1+x}$

```
Integrate[2 Pi f[x] Sqrt[1 + f'[x]^2], {x, 1, 2}]
```

$\frac{1}{6}\left(-1 + 5\sqrt{5}\right)\pi$

Tenta HVE01J5 2018-10-30

Kontinuitets villkor:
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
$\forall a \in D_f$

G1 (3p). $f(x) = \dfrac{-5c + (5-2c)x + 2x^2}{x-1}$

Det enda punkten som är problematisk är $x=1$. För alla andra punkter är funktionen kontinuerlig. Om lim "skall" finnas då täljaren måste vara 0 i $x=1$:

$$-5c + 5 - 2c + 2 = 0 \iff 7 = 7c \iff c = 1$$

Vi får

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{LH}{=} \lim_{x \to 1} \frac{4x+3}{1} = 7$$

Om funktionen skall bli kontinuerlig i $x=1$ då måste det vara sant att

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \quad (*)$$

Definierar man att $f(1) = 7$ då är $(*)$ uppfylld.

G2 (3p). Funktionen $f(x)$ är deriverbar i alla punkter $x \neq 2$, $x=2$ är det enda punkten som är problematisk. För att ha derivatan i punkten, måste högra och vänstra derivatan finnas och de måste vara lika:

villkor 1: $f'_V(2)$ och $f'_H(2)$ finns

villkor 2: $f'_V(2) = f'_H(2)$

2)

$$f_V'(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{LH}{=} 2ax\Big|_{x=2} = 4a$$

$f_V'(2)$ alltid finns och $f_V'(2)=4a$

$$f_H'(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{2x+1-(4a+b)}{x-2}$$

Om $f_H'(2)$ skall finnas då $2x+1-(4a+b)$ behöver vara 0 när $x\to 2^+$. Detta ger

$$4+1-(4a+b)=0$$

$$5=4a+b$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{2x+1-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-4}{x-2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 2\cdot 1 = 2$$

$f_H'(2)$ finns om $5=4a+b$, och då $f_H'(2)=2$

Vi finner två villkor:

$5=4a+b \iff f_H'(2)$ finns ($f_V'(2)$ finns alltid)

$4a=2 \iff f_V'(2)=f_H'(2)$

Vi får som lösning

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2} \\ b &= 5-4\tfrac{1}{2} = 5-2 = 3 \end{aligned}}$$

G3. $z = \frac{(2-3i)^2}{3+2i} = \frac{(2-3i)^2(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} =$

$= \frac{(4-12i-9)(3-2i)}{9+4} = (-)\frac{(5+12i)(3-2i)}{13}$

$= -\frac{15+24+(36-10)i}{13}$

$= -\frac{39+26i}{13} = -3-2i$

G4. $f(x) = \arctan\frac{1+2x}{1-2x}$ $\quad g = \frac{1+2x}{1-2x}$

$f'(x) = \frac{d}{dg}(\arctan g) \cdot \frac{dg}{dx}$

$= \frac{1}{1+g^2} \cdot \frac{2(1-2x)-(1+2x)(-2)}{(1-2x)^2}$

$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^2} \cdot \boxed{2\,\frac{1-\cancel{2x}+1+\cancel{2x}}{(1-2x)^2}}$ $\quad \frac{4}{(1-2x)^2}$

$= \frac{4}{(1-2x)^2+(1+2x)^2} = \frac{4}{1-\cancel{4x}+4x^2+1+\cancel{4x}+4x^2}$

$= \frac{4}{2+8x^2} = \frac{2}{1+4x^2}$

$g'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$

4)

G5. $\int \frac{2x+3}{x^2-16}dx = \int \left(\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4}\right)dx$

$2x+3 = A(x-4) + B(x+4)$ | ta $x=4$ och $x=-4$

$x=4$ $\quad 8+3 = A\cdot 0 + B\cdot 8$

$B = \frac{11}{8}$

$x=-4$ $\quad -8+3 = A(-8) + B\cdot 0$

$A = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$

Kollar: $\frac{5}{8(x+4)} + \frac{11}{8(x-4)} = \frac{5(x-4)+11(x+4)}{8(x+4)(x-4)}$

$= \frac{16x+44-20}{8(x^2-16)} = \frac{16x+24}{8(x^2-16)} = \frac{2x+3}{x^2-16}$

ok.

$\int \frac{2x+3}{x^2-16}dx = \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{11}{8}\int \frac{dx}{x-4}$

$= \frac{5}{8}\ln|x+4| + \frac{11}{8}\ln|x-4|$

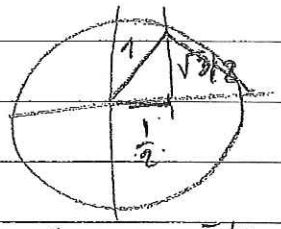
G6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2x^2}{\sin 3x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 4x}{3\cos 3x} = \frac{1}{3}$

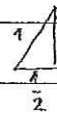
eller

$\int \frac{2x}{x^2-16}dx + 3\int \frac{dx}{x^2-16} = \ln|x^2-16| + \underbrace{\frac{3}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|}_{\text{formel bland}}$

G7. (a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\, e^{i\varphi} = 1\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

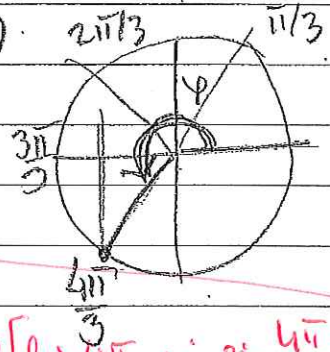




$1^2 = (\frac{1}{2})^2 + s^2$

$s = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b)



$x = -\frac{1}{2} \cdot 3 = 3 \cos \frac{4\pi}{3}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = 3 \sin \frac{4\pi}{3}$

$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$

$= \cos\pi \cos\frac{\pi}{3} - \overset{0}{\cancel{\sin\pi}} \sin\frac{\pi}{3}$

$= -1 \cdot \frac{1}{2}$

$3e^{\frac{4\pi}{3} i} = 3\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right]$

$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \overset{0}{\cancel{\sin\pi}} \cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi \sin\frac{\pi}{3} = -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

G8. $f(x) = \ln(1 + \sin(x - \frac{\pi}{2})) = \ln(1 + \sin x \overset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}} - \cos x \overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}})$

$= \ln(1 - \cos x)$

$f'(x) = \frac{1}{1 - \cos x} (-)(-) \sin x = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

$f(\frac{\pi}{2}) = \ln(1 - \cos\frac{\pi}{2}) = \ln 1 = 0$

$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$

$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) + o((x - \frac{\pi}{2})^2)$

6]

VG1. $\lim_{x\to 0} \frac{x[\sin x + 2x]}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x + 2x}{x}\right]$

$= \left\{ \lim(f\cdot g) = \lim f \cdot \lim g \text{ om } \lim f \text{ och } \lim g \text{ finns} \right]$

$\overset{?}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + 2x}{x}\right)$

$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+2\right)$

$= 1\cdot(1+2) = 3$

(eller VG1 två gånger)

$\frac{0}{0}$ ×2 $= \frac{4x + \sin x + x\cos x}{2x\cos x^2} = \frac{4 + \cos x - x\sin x}{2(\cos x^2 - 2x^2\sin x^2)}$

VG2. $x^2 + y(x)[\sin y(x) + 1] = 4 \quad \Big| \frac{d}{dx}$

$2x + y'(x)[\sin y(x) + 1] + y(x)[\cos y(x)\, y'(x)] = 0$

vätena i $x=2$ och $y(x=2)=0$

$2\cdot 2 + y'(2)[\sin 0 + 1] + 0[\cos 0\, y'(2)] = 0$

$y'(2) = -\frac{4}{4} = -4$

$\boxed{y' = \frac{-2x}{\sin y + 1 + y\cos y}}$

VG3. $\frac{f'(x)}{x} = 6f(x)x^4$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 6x^5 \quad \Big| \int(\dots)dx$

$\ln f(x) = x^6 + c \quad \Big| \exp$

$f(x) = e^c e^{x^6} = Ae^{x^6}$

$f(0) = 3 = Ae^0 \Rightarrow A = 3$

$$\boxed{f(x) = 3e^{x^6}}$$

MVG1 $\quad 2y''(x) - 8y'(x) + 10y(x) = 0 \quad | :2$

$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$= 2 \pm i \Leftrightarrow r_1 = 2+i,\ r_2 = 2-i$

Testa: $[r-(2+i)][r-(2-i)]$
$= r^2 - [(2+i)+(2-i)]r + (2+i)(2-i)$
$= r^2 - 4r + 4 + 1$

Om $r = 2 \pm i$ receptet säger att lösningen är:

$y(x) = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$

$y'(x) = A(2e^{2x}\cos x + e^{2x}(-)\sin x) +$
$+ B(2e^{2x}\sin x + e^{2x}(+)\cos x)$
$= e^{2x}\{(2A+B)\cos x + (2B-A)\sin x\}$

$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = A + B \cdot 0 \Rightarrow A = 2$

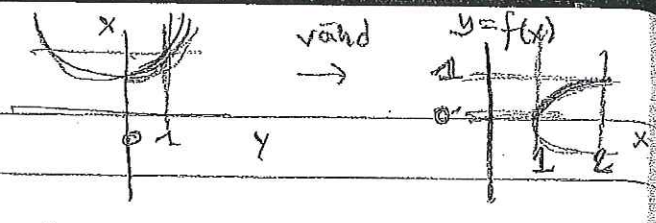
$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = (2A+B) \cdot 1 + (B-A) \cdot 0 \Rightarrow B = -2A$

$B = -4$

$y(x) = 2e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x$

$$\boxed{y(x) = 2e^{2x}(\cos x - 2\sin x)}$$

8



MVG2. $x = 1 + y^2$

$y \in [0,1] \Rightarrow x \in [1+0, 1+1] = [1,2]$

$$S = \int_1^2 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$f(x) = ?$ $f(x) = y$; $x = 1 + y^2$, $x - 1 = y^2$, $y = \pm\sqrt{x-1}$

$f(x) = +\sqrt{x-1}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$$S = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x-1}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x-1}\sqrt{1 + \frac{1}{4(x-1)}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x - 1 + \frac{1}{4}}\, dx = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x - \frac{3}{4}}\, dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3}\, dx$$

$$= 2\pi \frac{\left(x - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^2 = 2\pi \frac{1}{\frac{3}{2}}\left(x - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\left(2 - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{8-3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4-3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\frac{1}{2^3}\left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\cancel{4}\pi}{3 \cdot \cancel{2}\cdot 2}\left[5^{1+\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[5\sqrt{5} - 1\right]$$

1p [illegible]

1p [illegible]

1p [illegible]

2p S formula korrekt

2p integration räknad utan korrekt

fel på tentan 1

☆ $(3+2i)(3-2i) = 3^2 + (2i)^2 = 9 - 4$ (+)

☆ $\cancel{\int f\cdot g\,dx = \left(\int f\,dx\right)\left(\int g\,dx\right)}$ $\int f\cdot g\,dx \neq \left(\int f\,dx\right)\left(\int g\,dx\right)$

☆ $\cancel{e^{a+b} = e^a + e^b}$ $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

☆ Taylor $f(x)$ kring a är i variabel $x-a$ och inte x, Tex $f(x) = x - \frac{\pi}{2} + o(x)$ är fel om $a = \pi/2$; rätt är $f(x) = x - \frac{\pi}{2} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$

☆ $\cancel{\frac{1}{1+a} = 1 + a}$ $\frac{1}{1+a}$ kan inte skrivas som $1 + \frac{1}{a}$ eller $1+a$

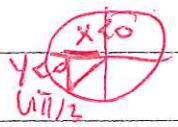
☆ kontinuitets villkor har ingenting at göra med om funktionen är eller inte är definierat i en punkt! $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ i punkten är intresse a det måste bli sant att

☆ $f(x) = \begin{cases} \frac{x+c}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) & x = 1 \end{cases}$ den är inte kontinuerlig för alla $x \neq 1$ för att den är definerat för alla $x \neq 1$; den är kontinuerlig för $\lim_{x\to a} f(x)$ finns för alla $x \neq 1$ och är desutom lika med $f(a)$

☆ när kan man använda LH regler? inte om täljare/nämnare är deriverbara men om utrycket har formen f/g där $f \to 0$ och $g \to \infty$ eller liknande

☆ $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ man skall kolla i villken kvadrant tallet sitter; $e^{i\frac{4\pi}{3}} \neq e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



☆ $e^{iv} = x + iy$ $\tan v = y/x$ och INTE $\tan v = x/y$

☆ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ stämmer inte!

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$

fel på tentan 2

* $\int \frac{P}{Q}\,dx$ är svårt med partiell integration man måste använda en speciell teknik
(som vi har diskuterat i detalj)

* $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3 + 2k\pi i}$ och INTE $e^{i\frac{\pi}{3} + n\pi i}$

* $(\cos x + 2)' = (\cos x)' + \cancel{2}^{\,0}$

* $y(x) = e^{2x}\cos x \qquad y'(x) = \cancel{e^{2x}\cos x \cdot (\cos x)'}$
$= (e^{2x})'\cos x + e^{2x}(\cos x)'$

* $(\cos(3x))' = -\sin(3x)\cdot(3x)' = -\sin(3x)\cdot 3$

* $\int \frac{dx}{2x+8} = \frac{1}{2}\ln|2x+8|$ INTE $\ln|2x+8|$

* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 4x}{\ldots} = \frac{\cos 0 + 4\cdot 0}{\ldots}$

* $\cancel{O(x^3) - O(x^3) = 0}$ FEL
$O(x^3) \pm O(x^3) = O(x^3)$ RÄTT

* $(\sin y)' = \cancel{y'\sin y} = \cos y \cdot y'$

* $\sin(y+1) \neq \sin y + 1$ testa tex med $y = 0$

* $(\sin y)' = \cancel{\cos y} = \cos y \cdot y'$

* $v = \tan\frac{y}{x}$ för $z = x + iy = re^{iv}$

* $\frac{13-12i}{3+2i} \neq \frac{13}{3} - \frac{12i}{2i}$ $\qquad \frac{13-12i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(13-12i)(3-2i)}{9+4}$

* $\sin(3x) \neq 3\sin x$ testa med tex $x = \frac{\pi}{4}$ och räknaren

fel på tentan (3)

* att lösa differentialekvationen utan konstanter

$$\frac{f'(x)}{x} = 6 f(x) x^4 \quad \text{med } f(0) = 3$$

$$\frac{df}{f} = 6x^5 dx \quad \Big| \int$$

$$\cancel{\ln f = x^6}$$

$$\cancel{f(x) = e^{x^6}}$$

här kan man inte ha $f(0)=3$

$$\ln f = x^6 + c$$

$$f(x) = e^{x^6 + c}$$

$$= e^{x^6} \cdot e^c$$

$$= \tilde{c} e^{x^6}$$

VIKTIG!