# Tentamen: MVE045 Matematisk analys, IT2

## 2019-08-27, 8.30 – 12.30

**Examinator:** **Zoran Konkoli, telefon 5480, Mikroteknologi och nanovetenskap – MC2, Chalmers**

**Telefonvakt:** **Mattias Lennartsson, telefon: 5325**

**Hjälpmedel:** **bifogat formelblad; ej räknedosa; BETA (lappar för lättare navigering tillåtna) med undantag för vissa problem där uträkningen ska redovisas**

Hela tentan ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 8 poäng. För betyget 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyget 4 krävs 30 poäng, och för betyget 5 krävs 40 poäng. Tid och plats för granskning av tentan kommer att anslås på kursens hemsida.

---

## Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

**1.** Funktionen *f* är definierad som nedan. Är detta en kontinuerlig funktion eller inte?

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \\ \log e & x = 0 \end{cases}$$

(a) Rita grafen och diskutera funktionens utseende. Vilka är de ”problematiska” punkterna som man måste analysera noggrant för att bedöma om den är kontinuerlig eller inte?

(b) Specificera det exakta matematiska villkoret för kontinuitet. Använd det specificerade matematiska villkoret för att bedöma om funktionen är kontinuerligt i *x=-4*, *x=0* och *x=3*.

**2.** Definiera konstanten *a* och funktions värdet $f(2a)$ så att funktionen *f(x)* är kontinuerlig för alla reella tal *x*. När du är färdig med detta, rita grafen av *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{x - 2a} & x \neq 2a \\ \\ f(2a) & x = 2a \end{cases}$$

**3.** Funktionen *f* är definierad som nedan.

$$f(x) = x^2 + 2x - \sin\sqrt{\pi}$$

Är detta en deriverbar funktion? När du svarar, visa tydligt hur du tänker: specificera det exakta matematiska villkoret för deriverbarhet och förklara hur du använder detta.

**4.** Går det att definiera konstanten *a* så att den imaginära delen av det komplexa talet *z* blir 0? Om ”inte”, förklara varför, om ”ja” ange *a* och *z*.

$$z = \frac{2 + 2i + i^2}{a + i^3}$$

**5.** Beräkna derivatan för funktionen $f(x) = \log(\cos(\sin(3x + 2)))$.

**6.** Beräkna integralen och specificera vilken typ av integral det är (bestämd eller obestämd):

$$\int_{1+e}^{1+e^2} \frac{xe^2}{x^2-2x+1}dx$$

Visa varje steg. **Du får inte använda BETA för problemet, dock är det tillåtet att hänvisa till det bifogade formelbladet.**

**7.** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi/2-x)}{\sin(3x)}$$

**8.** I det komplexa talplanet, befinner sig ett komplext tal *z* på avståndet 3 från origo och man vet att $z+z^*=2$. Räcker dessa villkor att definiera *z*? Om ”nej”, förklara varför, om ”ja”, ange talet.

## Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

**9.** Hitta med separationstekniken den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2\frac{f'(x)}{f(x)}=6f(x)^2x^4$$

Två olika begynnelsevillkor är angivna: $f(0)=2$ eller $f(0)=-3$. Hitta separata lösningar för vart och ett av dessa villkor.

**10.** Hitta högerderivatan ${f_H}'(x)$ och vänsterderivatan ${f_V}'(x)$ av funktionen $f(x)=\log(2|x|+1)$ i varje specifik punkt $x=0$, $x=3$ och $x=-2$. Jämför värdena av höger- och vänsterderivatan i dessa punkter. Vad är det du ser? Om du analyserar alla punkter som funktionen är definierat i, i vilka punkter är funktionen deriverbar?

**11.** Hitta exponenten *n* och konstanten *a* så att $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ när *f(x)* är definierat som nedan. När du är färdig med detta räkna ut $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$f(x)=\frac{10x^3-15x+\log(\sqrt{e}+1)}{a|x|^n+1}$$

## Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)

**12.** Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0)=2$ och $y'(0)=0$:

$$3y''(x)-24y'(x)+51y(x)=0$$

**13.** Hur ser $f(x)=\sin(\pi-\sqrt{x}+x)$ ut för $x$-värden nära 0? Vilken strategi kan du använda för att begripa hur en sådan komplicerad funktion ser ut i omgivningen av en punkt? Ser funktionen ut som ett polynom eller någonting annat?

# Formel blad

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a\log\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right|\right] + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2}du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}du = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + c$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$S = 2\pi\int f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$V = \pi\int f(x)^2 dx$$