MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2009-01-10 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Magnus Goffeng

tel. 0762-721860

MVE085 Flervariabelanalys V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 11/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(a) Undersök om kraftfältet $\mathbf{F}$ är källfritt och/eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p)

(b) Har kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ samma värde för alla styckvis glatta kurvor $\mathcal{C}$ med begynnelsepunkt i $(-1, 0, 0)$ och slutpunkt i $(1, 0, 0)$? (motivera ditt svar) (1p)

(c) Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på en partikel som rör sig längs cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ i xy-planet (dvs där $z = 0$), från $(-1, 0, 0)$ till $(1, 0, 0)$ (3p)

3. Sambandet mellan de Cartesiska koordinaterna x, y, z och de sfäriska koordinaterna r, ϕ, θ ges av $\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$

(a) Uttryck området $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ i de sfäriska koordinaterna (2p)

(b) Beräkna massan av den kropp som definieras av Ω då densiteten ges av $\rho(x, y, z) = z$ (4p)

4. (a) Förklara vad som menas med begreppen *kritisk punkt* respektive *lokalt minimum.* (2p)

(b) Finn och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^2y - x\ln y$ (4p)

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) Om $D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 0$ för alla enhetsvektorer $\mathbf{v}$ så är (a, b) en kritisk punkt till $f(x, y)$

(b) Alla kontinuerliga funktioner är också differentierbara

(c) Integralen $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$, där $D : x^2 + y^2 \leq 1$, är konvergent

(d) Funktionen $f(x, y) = x\arctan(y) + y\sin x$ har ett största värde på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ (dvs. maximum av $f(x, y)$, under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$, existerar)

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna i denna del rättas och bedöms endast om den första delen är godkänd.

6. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x, y, z) = x$ på skärningen mellan planet $z = x + y$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$ (6p)

7. Beräkna det totala flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ genom den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ där $0 \leq z \leq 2$, i riktning in mot z-axeln, genom att (6p)

(a) använda definitionen av ytintegral (du behöver då bl.a. parametrisera ytan och bestämma normalvektorer i varje punkt på ytan)

(b) tillämpa Gauss divergens sats på lämplig sluten yta

8. Välj **en** av följande två deluppgifter (om det i dina lösningarna finns något redovisat från båda deluppgifterna så granskas endast den först redovisade). (6p)

(a) Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $f \circ g$ där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(b) Formulera Greens formel och bevisa den för områden som är både x-enkla och y-enkla.

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V, 090110	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0,0)$ till funktionen $f(x,y) = \dfrac{1+x}{1+y}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $xe^y + ye^z - xz = 1$ i punkten $(1,0,0)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt f vara en funktion av två variabler som är sådan att $f_1(3,5) = 4$ och $f_2(3,5) = 3$. (2p)
Beräkna $h_2(2,1)$ då $h(x,y) = f(2x - y, x + 3y)$.

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan planet $z = \sqrt{3}\,x$ och cylindern $y^2 = x^3$. Beräkna längden av den del av kurvan som ligger mellan origo och punkten $(1,1,\sqrt{3})$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} e^{xy}\,dy$, där $\mathcal{C}$ är randen till det rektangulära området $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$, orienterad moturs. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för MVE085 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos2x}dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{sin2x}dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{x2+a2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x2+a}}dx = \ln|x + \sqrt{x2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x2+a}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x2+a} + a\ln|x + \sqrt{x2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x2+1)^n}dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.