MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 100827 kl. 8.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Fredrik Lindgren

Telefon: 0703 088 304

MVE085 Flervariabelanalys V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 09/10 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Antag att man vill tillverka en låda i form av ett rätblock till så låg kostnad som möjligt. Lådan skall rymma 1 liter och inte ha något lock (dvs vara öppen upptill). Materialet i lådans fyra sidväggar är fyra gånger så dyrt som materialet i botten. Hur hög skall lådan vara? (6p)

3. Antag att vi inför cylindriska koordinater r, θ, z vars samband till de Cartesiska koordinaterna x, y, z ges av

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

(a) Uttryck området $\Omega : x^2 + y^2 \leq z, x \geq 0, z \leq 2$ i de cylindriska koordinaterna r, θ, z (2p)

(b) Beräkna volymen av kroppen Ω (4p)

4. Betrakta den plana ytbit $\mathcal{S}$ som parametriseras av

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + (u+v)\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u$$

(a) Beräkna arean av $\mathcal{S}$ (3p)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ upp genom ytan $\mathcal{S}$ (dvs. i positiv z-led) (3p)

Överbetygsdelen finns på baksidan av detta blad

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Antag att x används som parameter i en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$ av skärningskurvan mellan nivåytorna $x + y - z + \sin(xyz) = 0$ och $x - y + 2z - \cos(xyz) = 0$, i en liten omgivning av $(0, 1, 1)$. Beräkna hastighetsvektorn $\mathbf{r}'(0)$. (6p)

6. Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} y dx - x dy + z^2 dz$, där $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan cylindrarna $z = y^2$ och $x^2 + y^2 = 4$, orienterad moturs sett från punkten $(0, 0, 5)$. (6p)

7. (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är *kontinuerlig* i en punkt (a, b) ? (1p)

(b) Definiera begreppet *partiell derivata* för en funktion $f(x, y)$. (1p)

(c) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är *differentierbar* i en punkt (a, b) ? (2p)

(d) Redogör för relationerna mellan följande egenskaper för en funktion $f(x, y)$: (2p)

i. $f(x, y)$ är kontinuerlig i (a, b)

ii. $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator i (a, b)

iii. $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 100827**	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $f(1,0)$ då $f(x,y) = g(h(y), h(x)), g(s,t) = s^2 t + s/t$ och $h(u) = 1/(u+1)$. (3p)
Lösning:

Svar: ....

(b) Ortsvektorn för en partikels position i rummet vid en viss tidpunkt $t > 0$ ges av $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Bestäm den tidpunkt vid vilket partikeln har lägst fart. (3p)
Lösning:

Svar: ....

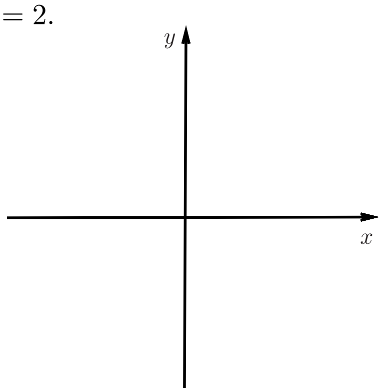
(c) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. Är vektorfältet källfritt och/eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$? (2p)
Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna det arbete som det konservativa kraftfältet $\mathbf{F} = (x+2)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ utför på en partikel som rör sig utefter cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ i xy-planet, från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$ (3p)
Lösning:

Svar: ....

(e) Skissa definitionsområdet till $f(x,y) = \sqrt{2 - (x^2 - y^2)}$ i samma figur som nivåkurvorna $f(x,y) = 1$ och $f(x,y) = 2$. (3p)
Skiss:



Formelblad för TMA043 och MVE085 09/10

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.