Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2011-01-12 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Helgesson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt S vara den del av ytan $z = xy$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 4$ dvs $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 4\}$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Bestäm den punkt på ytan S för vilket flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan (dvs flödets storlek i ytans normalrikting) är som störst. (6p)

7. Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 2\sin 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$. Visa att kurvan $\mathcal{C}$ ligger i ytan $z = xy$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$. (6p)

8. (a) Definiera begreppen *partiell derivata* och *riktningsderivata* och förklara varför partiell derivata kan betraktas som specialfall av riktningsderivata. (2p)

(b) Förklara varför $\mathbf{N} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ger en normalvektor till en funktionsyta $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ och använd denna observation för att härleda tangentplanets ekvation. (4p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-01-12	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Skissa ytan $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4z^2 = 4, 0 \leq y \leq 3\}$ (3p)

Skiss:

(b) Låt z vara en funktion av två variabler sådan att $z(x, y) = f(x^3 e^y)$, för någon differentierbar funktion f. Visa då att z uppfyller den partiella differentialekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ (3p)

Lösning:

(c) Ange Jacobimatrisen $D\mathbf{f}(x, y, z)$ till den funktion från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz\,,\, x\sin(yz))$. Beräkna speciellt $D\mathbf{f}(2, 0, 1)$ och använd bl.a. denna matris för att bestämma ett approximativt värde på $\mathbf{f}(2.1\,,\, 0.2\,,\, 0.9)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = xy - x - 2y$ på området $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 5 - x^2\}$ (5p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2011-01-12	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

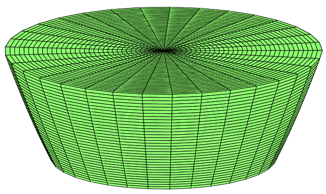
(a) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} x^2\,ds$ då $\mathcal{C}$ är det räta linjestycket (dvs sträckan) mellan punkterna $(0,1,1)$ och $(1,1,0)$ i $\mathbb{R}^3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna volymen av den kropp (se figur) som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ samt planen $z = 1$ och $z = 2$. (3p)

Lösning:



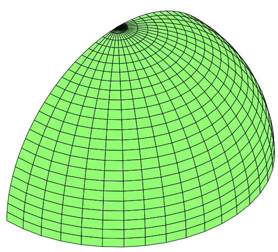
Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt $\mathcal{C}$ vara den positivt orienterade randen av triangelområdet D med hörn i $(0,0), (2,0)$ och $(1,1)$ och låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet som ges av $\mathbf{F}(x,y) = (\sin x + 3y^2)\mathbf{i} + (2x - e^{y^2})\mathbf{j}$ (6p)

(a) Är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt på området D? (motivera tydligt ditt svar)

(b) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ med hjälp av Greens formel.



5. Låt S vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ där $x \geq 0$, $z \geq 0$ (6p)

(a) Beskriv ytan S i sfäriska koordinater.

(b) Beräkna ytintegralen $\iint_S z\,dS$