Lösningsförslag till tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2012-01-11 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Fredrik Lindgren , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y, z) = 2x + z$ på skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 8$ och planet $x + y + z = 1$. (6p)

Lösning: Inför Lagrangemultiplikatorer och få att man ska leta efter kritiska punkter till

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = 2x + z + \lambda(x^2 + y^2 - 8) + \mu(x + y + z - 1).$$

Sätt de fem partiella derivatorna till 0. Den partiella derivatan map z ger oss att $\mu = -1$. De partiella derivatorna map x och y ger oss då att $2x\lambda = -1$ och $2y\lambda = 1$ och av detta ser vi att $\lambda \neq 0$ och att $x = -y$. Bivillkoret $x^2 + y^2 = 8$ ger nu $x = 2, y = -2$ eller $x = -2, y = 2$. Det andra bivillkoret ger nu $z = 1$. Det minsta värdet av $2x + z$ under bivillkoren är alltså -3 och det största är 5.

7. Två parallella plan skär en sfär. Visa att arean av den del av sfären som ligger mellan planen endast beror på sfärens radie och avståndet mellan planen. (6p)

Lösning. Låt $\mathcal{S}$ vara den delyta av sfären som ligger mellan de två planen. Vi kan uppenbarligen fritt anta att de två planen är parallella med xy-planet, dvs att de ges av $z = z_0$ och $z = z_1$, $z_0 < z_1$. Vi söker

$$\iint_{\mathcal{S}} dS.$$

Om sfären har radie R ges en parametrisering av $\mathcal{S}$ av $x = R\sin\phi\cos\theta$, $y = R\sin\phi\sin\theta$, $z = R\cos\phi$ med $0 \le \theta \le 2\pi$ och $\arccos(z_1/R) \le \phi \le \arccos(z_0/R)$. Areaelementet är $dS = R^2 \sin\phi \, d\phi d\theta$, så

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = 2\pi R^2 \int_{\arccos(z_1/R)}^{\arccos(z_0/R)} \sin\phi d\phi = 2\pi R(z_1 - z_0).$$

Detta uttryck beror bara av skillnaden mellan z_0 och z_1.

8. Formulera följande satser (beteckningar skall förklaras och förutsättningar/villkor skall anges);

(a) Greens sats (2p)

(b) Gauss sats (divergenssatsen) (2p)

(c) Stokes sats (2p)

Lösning: Vi börjar med Stokes sats. Låt $\mathcal{S}$ vara en glatt yta i rummet som har kontinuerlig enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ och glatt randkurva C orienterad moturs sedd från spetsen av normalen. Då säger Stokes sats att för ett glatt fält $\mathbf{F}$,

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Greens sats är specialfallet när ytan ligger i xy-planet och normalen är $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Vi får då

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big) dA.$$

Gauss sats säger att om R är en kropp i rummet och $\mathcal{S}$ dess randyta försedd med en utåtriktad styckvis glatt enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ gäller

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_R \nabla \bullet \mathbf{F} dV.$$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-01-11	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ge en intuitiv beskrivning av begreppet *gränsvärde* för funktioner av två variabler. (2p)

Lösning: Att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ betyder att $f(x, y)$ är godtyckligt nära L så fort (x, y) är tillräckligt nära (a, b).

(b) Bestäm ekvationer för tangentplanet och normallinjen till funktionsytan $z = x^2y - 2y + 5$
i punkten $(1, 3, 2)$. (3p)

Lösning: Ytan kan ses som nivåytan till $f(x, y, z) = x^2y - 2y - z$ genom $(1, 3, 2)$. Gradienten $\nabla f(1, 3, 2)$ är alltså normalvektor till tangentytan och riktningsvektor till normallinjen. Vi har $\nabla f = (2xy, x^2 - 2, -1)$ så $\nabla f(1, 3, 2) = (6, -1, -1)$. Tangentplanet ges alltså av

$$6x - y - z = D$$

där D bestäms av att tangentplanet går genom $(1, 3, 2)$, dvs $D = 6 \cdot 1 - 3 - 2 = 1$. Tangentplanet är alltså

$$6x - y - z = 1.$$

Normallinjen ges (på parameterform) av

$$(x, y, z) = (1, 3, 2) + t(6, -1, -1),\ t \in \mathbb{R}.$$

(c) Antag att en partikels position i xy-planet vid en tidpunkt t ges av $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i}+t\mathbf{j}$. Skissa partikelns rörelsebana för $-1 \le t \le 1$ och ange partikelns fart vid varje tidpunkt t under detta tidsintervall. När har partikeln lägst fart? (3p)

Lösning: Hastigheten är $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 1)$ varför farten är $\sqrt{1 + 9t^4}$. Lägst är farten alltså då $t = 0$.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 6xy-2x^3-3y^2$ och låt Ω vara det kvadratiska området $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.

(a) Bestäm alla kritiska punkter till $f(x, y)$. (2p)

(b) Bestäm det största värde som $f(x, y)$ antar på randen av området Ω. (3p)

(c) Bestäm det största värdet som $f(x, y)$ antar på området Ω. (1p)

Lösning: Vi har att $\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y)$. Sätt denna till 0 och få $y = x = x^2$. Detta ger $x = y = 1$ eller $x = y = 0$. De kritiska punkterna är alltså $(1, 1)$ och $(0, 0)$.

Randen består av områdena $x = 0$ och $x = 2$, $0 \le y \le 2$, och $y = 0$ och $y = 2$, $0 \le x \le 2$. Vi har att $f(0, y) = -3y^2$, $f(2, y) = 12y - 3y^2 - 16 = -4 - (y - 2)^2$, $f(x, 0) = -2x^3$, $f(x, 2) = 12x - 2x^3 - 12$. Inget av dessa uttryck överstiger 0 på aktuellt område. Detta är uppenbart för alla utom det sista uttrycket. Genom att sätta derivatan av det uttrycket till 0 ser vi att det maximeras då $x = \sqrt{2}$ och blir då $8\sqrt{2} - 12 < 0$. Eftersom $f(0, 0) = 0$ ser vi att 0 är funktionens största värde på randen.

Eftersom $f(1, 1) = 1$ måste 1 vara funktionens största värde.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-01-11	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt D vara triangelområdet med hörn i $(0,0),(0,1)$ och $(1,1)$. Avgör om den generaliserade integralen $\iint_D \frac{\sqrt{x}}{y^2}\,dxdy$ är konvergent eller divergent. (3p)

Lösning.

$$\iint_D \frac{\sqrt{x}}{y^2}\,dxdy = \int_0^1 \frac{1}{y^2}\Big(\int_0^y \sqrt{x}dx\Big)dy$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{4}{3}.$$

Integralen är alltså konvergent, med värde 4/3.

(b) Beräkna massan av den kropp K som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$, och som består av ett material med densiteten $\delta(x,y,z) = z$ (3p)

Lösning: Man ska beräkna $\iiint_K z\,dxdydz$.

$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_0^2 z\Big(\iint_{(x,y):x^2+y^2\le 2-z} dxdy\Big)dz = \pi\int_0^2 z(2-z)\,dz = \frac{4\pi}{3}.$$

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

4. Låt C vara cirkelbågen $x^2 + y^2 = 4, x \ge 0, y \ge 0$ orienterad moturs (dvs. från $(2,0)$ till $(0,2)$).

(a) Beräkna kurvintegralen $\int_C f(x,y)\,ds$, där $f(x,y) = 2x + y$. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (3p)

Lösning: Kurvan C parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$. Således gäller $ds = 2dt$, varför

$$\int_C (2x+y)ds = 2\int_0^{\pi/2}(4\cos t + 2\sin t)dt = 12.$$

Vi har också att $d\mathbf{r} = (-2\sin t\,dt, 2\cos t\,dt)$, så att $\mathbf{F}(t)\bullet d\mathbf{r} = (4\cos t, 2\sin t)\bullet(-2\sin t, 2\cos t)\,dt = -4\sin t\cos t\,dt = -2\sin 2t\,dt$. Således

$$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = -2\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = -2.$$

5. (a) Vilken typ av andragradsyta beskrivs av parametriseringen

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \quad , \ r \geq 0 \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi$$ (1p)

(b) Avgör om hastighetsfältet $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ är virvelfritt och/eller källfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p)

(c) Beräkna flödet av hastighetsfältet i deluppgift (b) nedåt (dvs. i negativ z-led) genom den del $\mathcal{S}$ av ytan i deluppgift (a) där $0 \leq r \leq 1$ (3p)

Lösning: Den beskrivna ytan är en en kon med apex (dvs spets) i origo och utbredning ovanför xy-planet. I (b) har vi $\nabla\bullet\mathbf{F} = 4z$ och $\nabla \times \mathbf{F} = (2y - 2y, 2x - 2x, 2z - 2z) = 0$. Fältet är alltså virvelfritt, men inte källfritt.

Slutligen söker vi $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}} dS$ där $\hat{\mathbf{N}}$ är en nedåtriktad enhetsnormal till ytan i (a). Vi har $\hat{\mathbf{N}}\, dS = -(\cos\theta, \sin\theta, 1) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\, drd\theta = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)\, drd\theta$ och $\mathbf{F}(x(r,\theta), y(r,\theta), z(r,\theta)) = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r^2)$, så att

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r^3\cos^2\theta + 2r^3\sin^2\theta - r^3)\, d\theta dr = \frac{\pi}{2}.$$