Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2012-09-01 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande två gränsvärden existerar eller ej, och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motivering krävs!) (6p)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7. Visa att ekvationen $x + 2y + z + e^z = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av origo och använd implicit derivering för att bestämma Maclaurinpolynomet för $f(x, y)$ av grad 2 (dvs. Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $(0, 0)$). (6p)

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler. (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-09-01**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt D vara det område i $\mathbb{R}^2$ som består av punkter (x, y) sådana att $0 < x^2 + y^2 \leq 2$. Förklara med hjälp av begreppet *omgivning* varför D varken är öppen eller sluten. (2p)

Svar:

....

(b) Uttryck $\dfrac{d^2}{ds^2} f(s^2, s)$ i de partiella derivatorna av f. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen till nivåkurvan $x^3 - 3xy - 2y^3 = 0$ i punkten $(2, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm största och minsta värde av funktion $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-09-01	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna rotationen av $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ och avgör om vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt på $\mathbb{R}^3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$ då D är det område i första kvadranten där $x + y \leq 1$.

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta det plana vektorfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara den slutna kurva i xy-planet som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t(1 - t^2)\mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 1$.

(a) Illustrera hur vektorfältet varierar utefter kurvan $\mathcal{C}$ genom att skissa vektorfältspilar (som indikerar vektorfältets storlek och riktning) i lämligt valda punkter på kurvan t.ex. där $t = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$. (2p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} ydx - xdy.$ (3p)

(c) Vad är arean av det område i planet som omsluts av kurvan $\mathcal{C}$? (1p)

5. Låt K vara den kropp som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $z \geq 1$.

(a) Parametrisera de ytor som begränsar kroppen K. (2p)

(b) Beräkna flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut ur kroppen K. (4p)