Datorövning 1 - Kurvor och ytor

avsnitt 1.1,1.2 och 1.5 i 'Flervariabelanalys och MATLAB'

För att bli godkänd från datorövningarna krävs att man deltagit aktivt (efter bästa förmåga) vid 5 av de 7 övningstillfällena, samt vid övningstillfällena arbetat med alla 4 kapitel ur kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB'. Datorövningarna skall genomföras individuellt eller i par om högst två personer tillsammans. Hur långt ni hinner varierar naturligtvis och tanken med den friare formen av kunskapskontroll, där ni själva bär ett stort ansvar för kunskapsutbytet, utan krav på att redovisa lösningar, är att ni skall våga ta er lite extra tid att experimentera och diskutera kring uppgifterna, samt fundera över hur MATLAB kan användas för att illustrera funktioner och begrepp som ni stöter på i samband med den övriga undervisningen. För att utnyttja tiden effektivt och därmed dra största möjliga nytta av en viss datorövning så rekommenderar jag att ni läser igenom motsvarande avsnitt i kompediet 'Flervariabelanalys och MATLAB' innan ni kommer till datorövningen.

Som ett första mål för denna datorövning tycker jag ni alla skall försöka hinna med uppgift 1-4 nedan. Om och när ni känner er klara med dessa uppgifter så föreslår jag att ni ger i kast med uppgift 5 & 6 nedan. Om ni (på skärmen inför handledare) redovisar lösningar till alla uppgifter nedan (inklusive uppgift 5 & 6) så erhåller ni ett s.k. kryss att addera till övriga kryss ni erhåller genom de sk. kryssuppgifterna (redovisade i Vecko-PM). Varje vecka kommer ni på detta sätt, som en liten morot, få möjligheten att tjäna ett extra kryss genom datorövningarna.

Uppgifter att göra i första hand

Uppgift 1: (se avsnitt 1.5 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta ...

(a) kurvan $x = t^3 - 3t, y = t^4 + 4t$, för $-2.5 < t < 2.5$

(b) cykloiden $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$, för $0 < t < 5\pi$
(Kurvan beskriver den väg en myra, som fastnat på ett hjul, färdas när hjulet rullar framåt. Använd `axis equal` för en mer skalriktig figur)

(c) koniska helixen $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$, för $0 < t < 30$
(se uppgift 11.3.17 i Adams)

Uppgift 2: (se avsnitt 1.1 & 1.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta grafen till följande funktion på området $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.

$$f(x,y) = 3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2} - 10(\frac{x}{5} - x^3 - y^5)e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{3}e^{-(x+1)^2-y^2}$$

Plotta även nivåkurvor till funktionen. Hur ser nivåkurvorna ut nära de lokala extrempunkterna (max/min) ?

Uppgift 3: (se avsnitt 1.1 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta (på lämpligt område) graferna till följande funktioner

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Tips: Ovanstående grafer blir snyggast i MATLAB om man först uttrycker funktionerna i polära koordinater dvs. $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$. Pröva att plotta ovanstående grafer både med rektangulära och polära koordinater, och jämför.

Uppgift 4: (se avsnitt 1.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta kurvan $2x^3 + y^3 = 10$ i planet och försök att i figuren uppskatta vilken punkt på kurvan som ligger närmast origo.

Tips: Plotta en punkt/stjärna i origo, i samma figur som kurvan, så blir det lättare att uppskatta avståndet. För att jämföra avstånd bör man också ha samma skalning på x- och y-axeln, vilket åstadkoms med kommandot `axis equal`.

Uppgifter för den flitige

Uppgift 5: Plotta nivåkurvan $f(x, y) = 0$ till funktionen $f(x, y) = x \sin y + y \cos x - xy$ på området $-15 \leq x \leq 15, -3 \leq y \leq 3$. Nivåkurvan delar in xy-planet i ett antal områden. Förklara varför funktionen $f(x, y)$ inte växlar tecken inom var och en av områdena. I vilka av områdena är $f(x, y) > 0$?

Tips: Plotta t.ex. nivåkurvan $f(x, y) = 0.2$ i samma figur eller använd `countorf`.

Uppgift 6: $P_1 = (1, 1, 0)$ och $P_2 = (0, 1, 1)$ är två punkter på de ytor som finns beskrivna i deluppgift (a), (b) och (c) nedan. Din uppgift är att försöka bestämma en så kort väg som möjligt, utefter respektive yta, mellan P_1 och P_2.

(a) cylindern $x^2 + z^2 = 1$

(b) sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

(c) funktionsytan $z = f(x, y)$, där $f(x, y) = 2 - x - (1 - 2x)^2 - 2(1 - y)^2$

Tips: T.ex. är $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + f(t, 1)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$, parametrisering av en kurva mellan punkterna utefter ytan $z = f(x, y)$ i deluppgift (c). Längden av kurvan mellan punkterna ges av integralen $\int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|\, dt$ som t.ex. kan beräknas med kommandot `quad` i MATLAB. Detta exempel på kurva ger inte den kortaste vägen mellan punkterna utefter ytan. Försök hitta parametrisering av en annan kurva utefter ytan som ger kortare väg. Det finns en kortaste väg men det är inte säkert du kan bestämma den, och det kan krävas många försök för att komma nära det optimala. Plotta gärna de kurvor du kommer på, tillsammans med ytan den ligger på, för att lista ut hur du skulle kunna göra bättre. Vi kan väl tävla om äran att lyckas bäst.