Datorövning 3 - Icke-linjära ekvationssystem

avsnitt 2.1–2.2 i 'Flervariabelanalys och MATLAB'

Som ett första mål för denna tredje datorövning tycker jag ni alla skall försöka hinna med uppgift 1-4 nedan. Om och när ni känner er klara med dessa uppgifter så föreslår jag att ni ger i kast med uppgift 5 & 6 nedan. Om ni (på skärmen inför handledare) redovisar lösningar till alla uppgifter nedan (inklusive uppgift 5 & 6) så erhåller ni ett s.k. kryss att addera till övriga kryss ni erhåller genom de sk. kryssuppgifterna (redovisade i Vecko-PM).

Information om genomförande och krav, vad det gäller datorövningarna, finns i PM för Datorövning 1 och på kurshemsidan.

Uppgifter att göra i första hand

Uppgift 1: (se avsnitt 2.1 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Betrakta ekvationssystemet;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Bestäm för hand (med penna och papper) alla lösningar på systemet. Bekräfta det sedan grafiskt genom att i en plott undersöka var nivåkurvorna skär varandra. Utför några steg i Newtons metod med startapproximationen $(x_1, y_1) = (3, 0)$ och avgör vilken av lösningarna (x^*, y^*) vi kommer närmare. Beräkna också felet $||(x^*, y^*) - (x_k, y_k)||$ i varje steg. Kan du se något mönster i hur snabbt felet minskar?

Uppgift 2: (se avsnitt 2.1 & 2.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Betrakta ekvationssystemet;

$$\begin{cases} xy + \arcsin(x + y) = 1 \\ x - y + \sin(xy) = 0 \end{cases}$$

Man kan visa att systemet har exakt en lösning. Använd Newtons metod för ge en god approximation av denna lösning. Plotta ingående nivåkurvor för att hitta lämpligt startvärde (obs! tänk på att arcsin inte är definierat för alla tal). Undersök hur väl din approximation satisfierar systemet. Använd även `fsolve`, med samma startvärde, för att bestämma en approximation av lösningen på systemet. Undersök detaljer kring varje steg i iterationen som `fsolve` utför.

Uppgift 3: (se avsnitt 2.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Betrakta ekvationssystemet;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 3 \\ xz + y = 2 \\ xy - z = 1 \end{cases}$$

Försök avgör hur många lösningar systemet har i området $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5, -5 \leq z \leq 5$, genom att plotta motsvarande nivåytor. Använd sedan `fsolve` för att bestämma en approximation till minst en av lösningarna.

Uppgift 4: (se avsnitt 2.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Försök hitta en (approximativ) lösning till ekvationssystemet;

$$\begin{cases} x + yz - w^2 = 3 \\ xy + z^2 - w = 0 \\ xyz + w = 1 \\ x^2y + z^2w = 0 \end{cases}$$

Pröva olika startpunkter tills `fsolve` hittar en lösning. Kontrollera svaret genom att undersöka hur väl approximationen satisfierar ekvationerna i systemet.

Uppgifter för den flitige

Uppgift 5: Vad ger Newtons metod om systemet är linjärt? Antag t.ex att vi har ett system av typen;

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

och att vi väljer en godtycklig startpunkt (x_1, y_1). Vad ger då efterföljande steg för punkter?

Uppgift 6: Börja med att skriva ett program `jacobi.m` med anropet `J=jacobi(f,x)` som beräknar Jacobimatrisen till en funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i en punkt $\mathbf{x}$ (använd differenskvoter). Skriv sedan ett program `newton.m` med anropet `x=newton(f,x0,tol)` som använder Newtons metod för att lösa ekvationssystem av typen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, där $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och `x0` är en startapproximation. Programmet skall utföra iterationen med en `while`-snurra som avbryts när avståndet mellan två successiva punkter (approximationer) är mindre än `tol`. Programmet `newton` skall också använda sig av ditt program `jacobi` för att beräkna jacobimatriserna i varje steg. Testa dina program på några funktioner/ekvationssystem.