

Datorövning 4 - Optimering

avsnitt 2.3–2.4 i 'Flervariabelanalys och MATLAB'

Som ett första mål för denna fjärde datorövning tycker jag ni alla skall försöka hinna med uppgift 1–4 nedan. Om och när ni känner er klara med dessa uppgifter så föreslår jag att ni ger i kast med uppgift 5 & 6 nedan. Om ni (på skärmen inför handledare) redovisar lösningar till alla uppgifter nedan (inklusive uppgift 5 & 6) så erhåller ni ett s.k. kryss att addera till övriga kryss ni erhåller genom de sk. kryssuppgifterna (redovisade i Vecko-PM).

Information om genomförande och krav, vad det gäller datorövningarna, finns i PM för Datorövning 1 och på kurshemsidan.

Uppgifter att göra i första hand

I uppgift 1–4 nedan är $f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x^2 - y^2} + xy/10$
och $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$, där $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

Uppgift 1: (se avsnitt 1.2 & 2.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Beräkna för hand de partiella derivatorna $f_1(x, y)$ och $f_2(x, y)$ och plotta nivåkurvorna $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ och $g(x, y) = 0$, med olika färg i samma figur. Avgör (ur figuren) hur många stationära punkter till $f(x, y)$ det finns i Ω och använd `fsolve` för att närmare bestämma dessa.

Uppgift 2: (se avsnitt 1.1, 2.3 & 2.4 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta grafen till $f(x, y)$ på området Ω (se tips nedan). Ur figuren framgår det bl.a. att funktionen har ett lokalt maximum i närheten av punkten $(0.7, 0.5)$ och ett lokalt minimum i närheten av $(0, -0.7)$. Utför några steg i gradientmetoden, med $(0.7, 0.5)$ resp. $(0, -0.7)$ som startapproximation, för att bättre lokalisera dessa extrempunkter. Använd också `fminunc` för att bestämma dessa extrempunkter. Undersök detaljer kring varje steg i iterationen som `fminunc` utför. Jämför slutligen resultaten med varandra och med vad du fick i uppgift 1.

Tips: Om vi i plotten inte vill ha med den del av ytan där $g(x, y) > 0$ så kan vi byta ut motsvarande element i matrisen $Z=f(X,Y)$ mot "värdet" `NaN` (Not a Number) innan vi plottar med t.ex. `surf(X,Y,Z)`. Detta kan göras med kommandot `Z(find(g(X,Y)>0))=NaN`.

Eftersom området i detta fall är en cirkelskiva kan vi alternativt använda oss av polära koordinater för att skapa plotten, då blir kanten lite snyggare. Gör i så fall en mesh i de polära koordinaterna `R` och `THETA` och använd dem för att skapa `X` och `Y`. Beräkna sedan funktionsvärdena `Z` och plotta ytan med `surf` på vanligt sätt.

Uppgift 3: (se avsnitt 2.4 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta skärningskurvan mellan funktionsytan $z = f(x, y)$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$ (betraktad som en ekvation i x, y, z). Försök avgöra ur figuren hur många lokala extrempunkter $f(x, y)$ har, under bivillkoret $g(x, y) = 0$, och använd `fmincon` för att bestämma dessa extrempunkter. Bestäm även extrempunkterna genom att parametrisera randen till området Ω och använd `fminbnd`.

Uppgift 4: (se avsnitt 2.3 & 2.4 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Plotta nivåkurvorna $f_1(x, y) = 0$ och $f_2(x, y) = 0$ med olika färg i samma figur. Som i uppgift 1 ger figuren information om var de stationära punkterna finns. Plotta därefter ca. 50 olika nivåkurvor till $f(x, y)$ i samma figur och försök avgöra de stationära punkternas karaktär (dvs. om de är max, min eller sadelpunkter). Undersök sedan egenvärdena till Hessianen i de stationära punkterna (använd approximationer från uppgift 1) och se om det bekräftar dina antaganden om punkternas karaktär.

Tips: Om du skapat anonyma funktioner för de partiella derivatorna $f_1(x, y)$ och $f_2(x, y)$ så kan du beräkna Hessianen approximativt m.h.a. differenskvoter. T.ex. är;

$$f_{12}(x, y) \approx \frac{f_1(x, y + h) - f_1(x, y - h)}{2h}$$

Egenvärdena till en matris kan beräknas med `eig`.

Uppgifter för den flitige

Uppgift 5: Skriv ett program `gradmet.m` med anropet `x=gradmet(f,x0,tol)` som använder gradientmetoden för att hitta maximum av en funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ då startapproximationen är $\mathbf{x0}$. Programmet skall utföra iterationen med en `while`-snurra som avbryts när avståndet mellan två successiva punkter (approximationer) är mindre än `tol`. Programmet skall inte plotta något utan bara beräkna maximipunkter. Testa sedan ditt program på t.ex. funktionen $f(x, y)$ i uppgift 1–4 ovan. Prova lite olika startpunkter, både nära och långt ifrån något lokalt maximum. Om du vill kan du göra en liten snurra med `ginput` så går det lite smidigare att testa olika startpunkter.

Uppgift 6: Skriv ett program `hessian.m` med anropet `H=hessian(f,x)` som beräknar Hessianen till en funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i en punkt $\mathbf{x}$ (använd differenskvoter). Testa sedan ditt program genom att beräkna Hessianen till någon funktion i dess kritiska punkter (välj t.ex. funktion från någon rekommenderad uppgift i kap 13).