

Datorövning 5 - Multipelintegraler

avsnitt 3.1–3.3 i 'Flervariabelanalys och MATLAB'

Som ett första mål för denna femte datorövning tycker jag ni alla skall försöka hinna med uppgift 1-4 nedan. Om och när ni känner er klara med dessa uppgifter så föreslår jag att ni ger i kast med uppgift 5 & 6 nedan. Om ni (på skärmen inför handledare) redovisar lösningar till alla uppgifter nedan (inklusive uppgift 5 & 6) så erhåller ni ett s.k. kryss att addera till övriga kryss ni erhåller genom de sk. kryssuppgifterna (redovisade i Vecko-PM). Information om genomförande och krav, vad det gäller datorövningarna, finns i PM för Datorövning 1 och på kurshemsidan.

Uppgifter att göra i första hand

Uppgift 1: (se avsnitt 3.1 & 3.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Beräkna följande integraler m.h.a. `dblquad` resp. `triplequad`.

(a) $\iint_D \sqrt{y} \sin(xy) \, dx dy$, där $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi/2$

(b) $\iint_D e^{y/x} \, dx dy$, där $D: 1 \leq x \leq 2 - y, |xy| \leq 1$

(c) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$, där $D: x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 2$

Uppgift 2: (se avsnitt 3.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz$$

där $D: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, dels exakt för hand och dels med Monte Carlo-metoden. Använd $N = 10, 100, 1000, 10000$ punkter, och upprepa varje sådan beräkning 10-15 gånger. Studera hur relativa felet varierar från gång till gång då N hålls fixt och hur relativa felet förändras då N ökas.

Anm. Om \tilde{I} är en approximation av det exakta värdet I så är det relativa felet $\left| \frac{I - \tilde{I}}{I} \right|$

Uppgift 3: (se avsnitt 3.1 & 3.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

där $D : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4$, med de metoder som anges i (a)-(d) nedan. Låt MATLAB ta tiden för beräkningarna med respektive metod. Beräkna även (för hand) integralens exakta värde och undersök de relativa felen du får med respektive metod. Jämför metoderna m.a.p. tidsåtgång och fel, och försök bedöm deras effektivitet.

- (a) Beräkna en Riemannsumma för dubbelintegralen.
- (b) Använd Simpsons formel.
- (c) Använd `dblquad`.
- (d) Använd Monte Carlo-metoden.

Uppgift 4: (se avsnitt 3.1 & 3.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Låt D vara det område i planet som begränsas av nivåkurvorna $x \sin y + y \cos x = -4$ och $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$, och som innehåller punkten $(-2, 2)$. Plotta området D , som i exemplet i avsnitt 3.3, och beräkna dess tyngdpunkt.

Uppgifter för den flitige

Uppgift 5: Skriv ett program `simpson.m` med anropet `I=simpson(f,a,b,c,d,m)` som använder Simpsons formel för att beräkna integralen till en funktion $f(x, y)$ på en rektangel $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. Indata `m` i anropet anger antalet delintervall i x -led och y -led. Testa sedan ditt program på någon integral.

Uppgift 6: Beräkna volymen av ett fyrdimensionellt klot $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 1$ med hjälp av Monte Carlo - metoden. Försök även för hand beräkna volymen exakt och jämför.