

Datorövning 6 - Vektoranalys

avsnitt 1.6 & 4.1–4.3 i 'Flervariabelanalys och MATLAB'

Som ett första mål för denna sjätte datorövning tycker jag ni alla skall försöka hinna med uppgift 1-4 nedan. Om och när ni känner er klara med dessa uppgifter så föreslår jag att ni ger i kast med uppgift 5 & 6 nedan. Om ni (på skärmen inför handledare) redovisar lösningar till alla uppgifter nedan (inklusive uppgift 5 & 6) så erhåller ni ett s.k. kryss att addera till övriga kryss ni erhåller genom de sk. kryssuppgifterna (redovisade i Vecko-PM).

Information om genomförande och krav, vad det gäller datorövningarna, finns i PM för Datorövning 1 och på kurshemsidan.

Uppgifter att göra i första hand

Uppgift 1: (se avsnitt 1.6 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Om en kurva i xz -planet med parametrisering $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, roterar kring z -axeln skapas en s.k. rotationsyta. En sådan parametriseras enklast genom;

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = x(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi$$

Använd detta för att parametrisera den torus som bildas då cirkeln $(x - 3)^2 + z^2 = 4$ roterar kring z -axeln. Plotta sedan den del av torusen som ligger utanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$ (använd knepet med NaN).

Uppgift 2: (se avsnitt 4.1 & 4.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Antag att $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (2 - x + y)\mathbf{j}$ beskriver ett plant kraftfält. Plotta kraftfältet på området $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$, samt några av dess strömlinjer i samma figur. Antag att en partikel, under inverkan av kraftfältet \mathbf{F} (och andra krafter), rör sig utefter kurvan $y = x^3$ från punkten $(-1, -1)$ till $(1, 1)$. Försök uppskatta ur figuren om det totala arbetet som kraftfältet uträttar är positivt eller negativt (plotta partikelbanan i samma figur). Undersök sedan om din uppskattning är rätt genom att beräkna det exakta värdet på arbetet (för hand med penna och papper).

Uppgift 3: (se avsnitt 4.1 & 4.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Antag att $\mathbf{F} = (x - 1)\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ beskriver hastighetsvektorerna i en stationär strömning. Plotta hastighetsfältet på området $0 < x < 3$, $1 < y < 4$, $-2 < z < 2$, samt några av dess strömlinjer i samma figur (välj "startpunkterna" för strömlinjerna på någon lämplig yta t.ex. i planet $y = 3$). Illustrera också med hjälp av `streamparticles` hur partiklar rör sig utefter strömlinjerna.

Uppgift 4: (se avsnitt 4.2 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB')

Låt \mathbf{F} vara samma hastighetsfält som i uppgift 3 ovan och låt Ω vara det område som begränsas av halvsfären $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Illustrera strömningen ut/in ur området Ω genom att plotta ytan till området och ett antal hastighetsvektorer på ytan. Plotta även hastighetsvektorernas projektion i normalriktningen och använd färg för att visa hur stort flödet är genom ytan. Försök uppskatta ur figuren om det totala flödet ut ur området är positivt eller negativt. Undersök sedan om din uppskattning är rätt genom att beräkna det exakta värdet på flödet (för hand med penna och papper).

Uppgifter för den flitige

Uppgift 5: Plotta de konservativa vektorfälten i (a) och (b) nedan. Plotta också i samma figur ett antal fältlinjer och några ekvipotential-kurvor/ytor till vektorfälten. Försök verifiera ur figuren att fältlinjerna skär ekvipotential-kurvorna/ytorna med rät vinkel.

(a) $\mathbf{F} = (3x^2y - 1)\mathbf{i} + (x^3 + 2y)\mathbf{j}$ (ett plant vektorfält)

(b) $\mathbf{F} = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}$ (se uppgift 15.2.5 i Adams)

Uppgift 6: Använd metoderna i avs. 4.3 i kompendiet 'Flervariabelanalys och MATLAB' för att illustrera divergensen och rotationen hos följande vektorfält;

(a) $\mathbf{F} = \cos(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \cos(x - y)\mathbf{j}$ (ett plant vektorfält)

(b) $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ (se uppgift 16.1.6 i Adams)