MVE085 Flervariabelanalys V2, läsåret 2012/13
Vecko–PM läsvecka 4

Calculus: 14.1 - 14.6, 10.6

De tre första läsveckorna i kursen (del 1) handlade i huvudsak om derivering av funktioner av flera variabler och hur dessa derivator kan användas för att lösa/analysera olika typer av problem. De återstående veckorna (del 2) kommer istället handla mycket om integrering av funktioner av flera variabler. I envariabelanalysen såg vi hur integraler kan användas för att t.ex. beräkna areor av områden i xy-planet, areor av rotationsytor eller massa av en rak tråd med varierande densitet. Vi skall bygga vidare på den teorin och se hur man kan integrera funktioner av två resp. tre variabler och då kunna beräkna t.ex. volym och massa av kroppar i rummet, area och massa av ytor och lite längre fram i kursen skall vi räkna på flöden genom ytor. Vi börjar denna "resa" med att se hur funktioner av två variabler kan integreras genom s.k. *dubbelintegraler*. Definitioner och viktiga räkneregler finns i avsnitt 14.1. För hand beräknas dubbelintegraler genom s.k. *upprepad enkelintegration* dvs. genom två integrationer efter varandra (först i x-led och sedan i y-led, eller vice versa), av den typ vi redan känner till från en variabel. När vi integrerade funktioner av en variabel var det egentligen aldrig några svårigheter med integrationsgränserna, utan vi ägnade den mesta av tiden åt olika typer av integrationstekniker. Samma integrationstekniker kommer vi använda i flera variabler men nu är det inte alltid lika enkelt att bestämma integrationsgränserna. Om området man integrerar över inte är rektangulärt, vilket vi kommer studera speciellt i avsnitt 14.2, så kommer integrationsgränserna m.a.p. den ena variabeln bero på den andra variabeln. Ofta kommer det då att vara till stor hjälp om man kan skissa integrationsområdet. Avsnitt 14.3 handlar om *generaliserade dubbelintegraler* och *medelvärdessatsen* för dubbelintegraler och avsnitt 14.4 handlar om *variabelsubstitution i dubbelintegraler*, där en av de viktigare substitutionerna är övergång till *polära koordinater*. Vidare i avsnitt 14.5 skall vi se hur funktioner av tre variabler kan integreras genom s.k. *trippelintegraler*. I huvudsak är det inte så stor skillnad på att integrera funktioner av två respektive tre variabler, men då integrationsområdet i en trippelintegral är ett område i rummet kan det dock ibland vara om något ännu lite klurigare att bestämma integrationsgränserna. En annan skillnad är också att vi i trippelintegraler har ännu fler möjligheter på vilken ordningsföljd vi kan integrera. Slutligen skall vi denna vecka se hur man kan göra variabelsubstitution i trippelintegraler och i avsnitt 14.6 ägnas mest fokus på övergång till s.k. *cylindriska koordinater* och *sfäriska koordinater*. Dessa koordinatbyten tas även upp i avsnitt 10.6 som snarare skall betraktas som en del av avsnitt 14.6.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
14.1	13	15, 17	
14.2	3, 5, 19	9, 13	15, 25, 27, 30
14.3	3	7, 9	17, 21
14.4	3, 9, 11	15, 21, 23, 32($u = x + y, v = 3x + 4y$), 35b	25, 27, 33, 36
14.5	1, 5	9, 14, 16	7, 11, 27
10.6	1-14		
14.6	1, 3	13, 15, 16	5, 14.4.29

Veckans kryssuppgifter: 14.2.13, 14.4.21, 14.5.7, 14.6.13

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	Mål
14.1	känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 794) vid problemlösning
14.2	beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration (sats 14.2.2).
14.3	avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad.
14.3	beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x, y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens.
14.3	veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område.
14.4	ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan areaelementen.
14.4	ange hur ett område givet i cartesiska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt.
14.4	känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett-ett (sid 813).
14.4	beräkna dubbelintegraler med hjälp av variabelsubstitution.
14.5	beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration.
14.6	ange sambanden mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater samt sambandet mellan volymelementen.
14.6	beräkna trippelintegraler med hjälp av variabelsubstitution.
14	tillämpa dubbel- och trippelintegral för att bestämma t.ex. area, volym, massa, laddning och tyngdpunkt (ej tröghetsmoment).

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	Mål
14.1	förklara vad det innebär att f är integrerbar över ett rektangulärt område i planet (s 791 och 792) och utnyttja Riemannsummor för att approximera värdet på en integral (se t.ex ex.1 s 792-3).
14.1	utnyttja symmetrier vid beräkning av dubbelintegraler (se t.ex ex. 3 s 794-795).
14.3	formulera och bevisa medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler.
14.4	formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 814).
14.4	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbelintegral
14.6	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av trippelintegral
14	beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).