CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematik

Transformer och differentialekvationer för M3

Diskret Fouriertransform

Antag att funktionen $f(t)$ är uppbyggd av periodiska funktioner med för oss okända frekvenser, men att vi önskar bestämma dessa frekvenser. Det vi har till förfogande är ett antal (N st) observationer av $f(t)$ vid vissa tidpunkter t_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Vi antar dessutom att dessa tidpunkter är jämnt fördelade så att $t_n - t_{n-1} = \Delta_t$ för alla $n > 0$.
Sätt $x(n) = f(t_n)$. Vi skall här se hur man kan utnyttja den diskreta Fouriertransformen av observationerna $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ för att bestämma frekvenserna.
Den diskreta Fouriertransformen av en talföljd med N element, $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ är en ny talföljd med samma antal element, $\hat{x}(0), \hat{x}(1), \ldots, \hat{x}(N-1)$, definierade av

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w^{-kn}, \qquad \text{där } w = e^{i2\pi/N}.$$

Det finns också en inverstransform

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) w^{kn}.$$

Här är på sin plats att visa att inverstransformen verkligen ger den ursprungliga följden.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) w^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{N-1} x(r) w^{-kr} \right) w^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(r) w^{k(n-r)} \right)$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(w^{n-r}\right)^k \right).$$

Här kan vi utnyttja den geometriska seriens summa: $\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1-a^N}{1-a}$ om $a \neq 1$. Med $a = w^{n-r}$ får vi då om $r \neq n$:

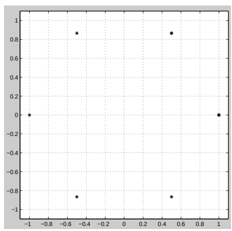
$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(w^{n-r}\right)^k = \frac{1 - w^{(n-r)N}}{1 - w^{n-r}} = 0,$$

ty $w^{(n-r)N} = e^{i\frac{2\pi}{N}(n-r)N} = (e^{i2\pi})^{(n-r)} = 1^{(n-r)} = 1$. För $r = n$ är $\sum_{k=0}^{N-1} \left(w^{n-r}\right)^k = N$. Således är $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) w^{kn} = \frac{1}{N} x(n) N = x(n)$.

Låt oss nu anta att $x(n) = f(t_n)$ där $f(t) = e^{i\Omega t} = \exp(i\Omega t)$ och $t_n = n\Delta_t$, $0 \leq n \leq N-1$. Då är $x(n) = \exp(i\Omega n \Delta_t)$. Vi låter Matlab beräkna transformen av $x(n)$. I Matlab skrivs transformen `fft` som är en förkortning av Fast Fourier Transform. Ordet *Fast* syftar här på att en speciellt snabb beräkningsrutin används, en rutin som fungerar bäst då antalet element i följden är en potens av 2.
Som illustration räcker det med ett litet antal element; vi väljer $N = 8 = 2^3$. Vidare tar vi $\Delta_t = 2$ och $\Omega = \pi/6$.

Följden är då:

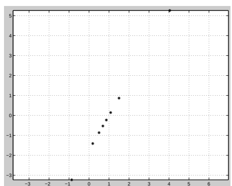
$$x = [1.0000,\ 0.5000 + 0.8660i,\ -0.5000 + 0.8660i,\ -1.0000,$$
$$-\,0.5000 - 0.8660i,\ 0.5000 - 0.8660i,\ 1.0000,\ 0.5000 + 0.8660i]$$



Punkterna visas i vidstående plot.

Transformen är:

$$y = \text{fft}(x) = [1.5000 + 0.8660i,\ 4.0391 + 5.2638i,$$
$$-\,0.8660 - 3.2321i,\ 0.1857 - 1.4104i,\ 0.5000 - 0.8660i,$$
$$0.6930 - 0.5318i,\ 0.8660 - 0.2321i,\ 1.0823 + 0.1425i]$$



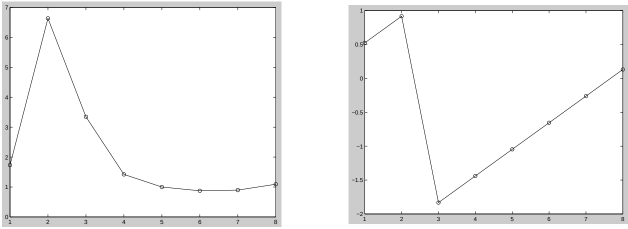
Denna visas i vidstående plot.

Vi beräknar också inverstransformen

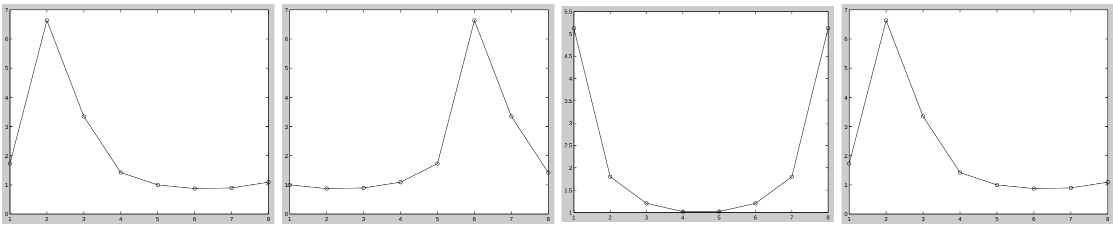
$$\begin{aligned}\text{ifft}(y) = [&1.0000,\ 0.5000 + 0.8660i,\ -0.5000 + 0.8660i,\ -1.0000 + 0.0000i,\ -0.5000 - 0.8660i,\\ &0.5000 - 0.8660i,\ 1.0000 - 0.0000i,\ 0.5000 + 0.8660i]\end{aligned}$$

och ser att den är x som väntat.
Av grafen ovan ser det ut som att punkterna i transformen ligger på en rät linje (som inte går genom origo). Har den något med Ω att göra?

Vi ritar ett par bilder till som illustrerar följden $y = \text{fft}(x)$, dels absolutbeloppet $\text{abs}(y)$, dels argumentet $\text{angle}(y)$. För att göra bilderna tydligare förbinds punkterna med linjer.



Här ser vi att största värdet för $|y|$ erhålls för det andra elementet. Där gör också argumentet ett hopp från ungefär 1 till ungefär -2. Finns det något samband? Samband med Ω?
Vi ritar ett par grafer som ytterligare illustrerar de fenomen som observerats ovan. I nedanstående figurer över absolutbeloppet av transformen är Δ_t i tur och ordning 2 (som ovan), 8, 11.25 och 14.



Det vi ser är att största värdet erhålls för det andra elementet då $\Delta_t = 2$, för det sjätte elementet då $\Delta_t = 8$ och för både det första och åttonde elementet då $\Delta_t = 11.25$. Då $\Delta_t = 14$ erhålls exakt samma figur som då $\Delta_t = 2$.
För att om möjligt reda ut detta så försöker vi beräkna transformen för hand:

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{-kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\Omega n\Delta_t - \frac{2nk\pi}{N})} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\Omega\Delta_t - \frac{2k\pi}{N})n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\theta_k}\right)^n,$$

där $\theta_k = \Omega\Delta_t - \frac{2k\pi}{N}$.
Geometriska seriens summa ger att

$$\begin{aligned}\hat{x}(k) &= \frac{1 - e^{iN\theta_k}}{1 - e^{i\theta_k}} = \frac{1 - e^{i(N\Omega\Delta_t - 2k\pi)}}{1 - e^{i\theta_k}} = \frac{1 - e^{iN\Omega\Delta_t}}{1 - e^{i\theta_k}} = \frac{e^{iN\Omega\Delta_t/2}\left(e^{-iN\Omega\Delta_t/2} - e^{iN\Omega\Delta_t/2}\right)}{e^{i\theta_k/2}\left(e^{-i\theta_k/2} - e^{i\theta_k/2}\right)}\\ &= \frac{-2i\sin N\Omega\Delta_t/2}{-2i\sin\theta_k/2} e^{i(N\Omega\Delta_t/2 - \theta_k/2)} = \frac{\sin N\Omega\Delta_t/2}{\sin\theta_k/2} e^{i((N-1)\Omega\Delta_t/2 + \frac{k\pi}{N})}.\end{aligned}$$

Av detta ser vi genast att $|\hat{x}(k)| = \left|\frac{\sin(N\Omega\Delta_t/2)}{\sin(\theta_k/2)}\right|$.
Här varierar $\sin(N\Omega\Delta_t/2)$ inte med k, så vi ser att $|\hat{x}(k)|$ är som störst då $\sin(\theta_k/2)$ är nära noll, dvs då $\theta_k = \Omega\Delta_t - \frac{2\pi k}{N} \approx 2m\pi$ för något heltal m.
Låt oss undersöka de fyra exempel som vi illustrerat ovan där $\Omega = \pi/6$, $\Delta_t = 2,\ 8,\ 11.25$ och 14. I första fallet är $\Omega\Delta_t = \pi/3 = \frac{4}{3}\frac{2\pi}{8}$. Det heltal som är närmast $\frac{4}{3}$ är 1. Detta innebär att följdens andra element har störst belopp, precis som vi ser i grafen. Notera att följden skall ha index $0, 1, 2, ..., N-1$. Detta ger förskjutningen ett steg.
I det andra fallet är $\Omega\Delta_t = 4\pi/3 = \frac{16}{3}\frac{2\pi}{8}$. Det heltal som är närmast $\frac{16}{3}$ är 5. Detta innebär att följdens sjätte element har störst belopp.

I det fjärde fallet är $\Omega\Delta_t = 7\pi/3 = 2\pi + \pi/3 = 2\pi + \frac{4}{3}\frac{2\pi}{8}$, vilket förklarar varför vi ser toppen vid plats 2 igen. Att $\Omega\Delta_t$ i de två fallen $\Delta_t = 2$ och $\Delta_t = 14$ skiljer sig åt med 2π implicerar att transformerna i dessa fall är lika.
I det tredje fallet är $\Omega\Delta_t = 11.25\pi/6 = \frac{22.5}{3}\frac{2\pi}{8}$, vilket förklarar toppen vid det åttonde elementet. För att förstå toppen vid första elementet måste vi observera att vinkeln $11.25\pi/6$ ligger mitt emellan $7\frac{2\pi}{8}$ och $2\pi + 0\frac{2\pi}{8}$. En liten förändring av Δ_t skulle ge att en av topparna skulle försvinna.

Åter till den generella analysen. Låt oss välja Δ_t så att $\Omega\Delta_t < \pi$. Detta kräver naturligtvis viss kännedom om storleken på Ω. Då k varierar, så varierar $\theta_k = \Omega\Delta_t - \frac{2\pi k}{N}$ från $\Omega\Delta_t < \pi$ till $\Omega\Delta_t - 2\pi + \frac{2\pi}{N} > -2\pi + \frac{2\pi}{N}$ i steg om $\frac{2\pi}{N}$. Den närmaste heltalsmultipeln av 2π är 0. Låt k_0 vara det k-värde för vilket θ_k ligger närmast 0. (I undantagsfall kan det finnas två k-värden som är lika bra, k_0 och $k_0 + 1$.) Då är $\theta_{k_0} = \delta$, där $|\delta| \le \frac{\pi}{N}$. Grafen till $|\hat{x}(k)|$ kommer att visa en tydlig topp vid $k = k_0$. Vi har $\Omega = \frac{2\pi k_0}{N\Delta_t} + \frac{\delta}{\Delta_t}$, så att $\frac{2\pi k_0}{N\Delta_t}$ approximerar Ω med ett fel som är högst $\frac{\pi}{N\Delta_t}$.
För negativa Ω, eller hellre för $f(t) = e^{-i\Omega t}$, där fortfarande $0 < \Omega\Delta_t < \pi$, får vi toppen för $k = N - k_0$. Eftersom transformen är linjär så kommer med $f(t) = \cos\Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$ eller $f(t) = \sin\Omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})$ transformen $|\hat{x}(k)|$ att få ett maximum vid k_0 som ovan för termen $e^{i\Omega t}$ och ett vid $N - k_0$ för $e^{-i\Omega t}$. Dessa kommer att ligga symmetriskt, så därför räcker det att studera $|\hat{x}(k)|$ för $k \le \frac{N}{2}$. Detta gäller generellt för reella funktioner, ty det framgår direkt ur definintionen av $\hat{x}(k)$ att $\hat{x}(N-k) = \overline{\hat{x}(k)}$ för reella $x(n)$. Om $f(t)$ är sammansatt av flera frekvenser så kommer transformen att visa en topp för varje frekvens, förutsatt att kravet $0 < \Omega\Delta_t < \pi$ är uppfyllt för alla frekvenserna. Detta krav kan formuleras med hjälp av perioderna i stället: $0 < \Delta_t < T_{min}/2$ där T_{min} är den kortaste perioden för de överlagrade svängningarna. Den som har studerat signalbehandling känner igen detta villkor från samplingssatsen: samplingsfrekvensen $\frac{1}{\Delta_t}$ skall vara större än 2 gånger den största förekommande frekvensen $\frac{1}{T_{min}}$.
Svaret på den inledande frågan är att man kan visa att punkterna $\hat{x}(k)$ verkligen ligger på en rät linje i det komplexa planet, nämligen den linje som går genom punkten $(1, 0)$ och har riktningsvinkeln $N\Omega\Delta_t/2$.

Med $x(t) = e^{(-a+i\Omega)t}$ så erhålles med kalkyler som ovan att $\hat{x}(k) = \frac{1-e^{N(-\beta+i\theta_k)}}{1-e^{-\beta+i\theta_k}}$, där $\beta = a\Delta_t$ och θ_k som ovan. Omskrivning leder till

$$|\hat{x}(k)|^2 = \frac{(1 - e^{-N\beta})^2 + 4e^{-N\beta}\sin^2(N\theta_k/2)}{(1 - e^{-\beta})^2 + 4e^{-\beta}\sin^2(\theta_k/2)}.$$

Maximum för $|\hat{x}(k)|$ erhålls som ovan, men vi ser också att vid stor dämpning är $|\hat{x}(k)| \approx 1$ för alla k. Vid måttlig dämpning ges frekvensen som ovan.

Vi har här utnyttjat Matlab för transformering mm. Givetvis kunde vi istället utnyttjat Mathematica, där transformen kallas Fourier.