



Transformer och differentialekvationer för M3 2007

Inlämningsuppgift 1

1. Definiera funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{t^2}{4}, & 2 < t \leq 5 \\ t \sin t, & t > 5 \end{cases}$$

Skriv $f(t)$ som ett enda uttryck med hjälp av språngfunktionen $H(t)$ (även kallad $\theta(t)$). Definiera också en Mathematicafunktion $f[t_]$. Beräkna $f'(t)$ både för hand och med Mathematica. I Mathematica måste resultatet förenklas med `Simplify`. Plotta funktionen för $0 \leq t \leq 15$.

2. Beräkna Laplacetransformen av $f(t)$.

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = f(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

med Laplacetransformering (använd Mathematica). Plotta lösningen för $0 \leq t \leq 15$.

4. Lös samma ekvation med `DSolve` och jämför.

5. Lös följande system av differentialekvationer med hjälp av Mathematica, dels med `DSolve`, dels med hjälp av Laplacetransformering och lämplig ekvationslösningsmetod.

$$\begin{cases} 5x'' + y'' + 20x + 4y = \delta(t) \\ 4x'' + y'' + 16x + 5y = 0 \\ x(t) = y(t) = 0 \quad \text{om } t < 0 \end{cases}$$

Villkoret $x(t) = y(t) = 0$ om $t < 0$ blir uppfyllt om man föreskriver byggnelsevillkoren $x(t_0) = x'(t_0) = y(t_0) = y'(t_0) = 0$ för något $t_0 < 0$, t.ex. $t_0 = -1$.

6. Beräkna Laplacetransformen av $|\sin t|$.

7. (Överbetygsuppgift.) Hur kan man lösa ekvationen

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = |\sin t| \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

för $0 \leq t \leq 15$? Kan Laplacetransform användas? `DSolve`?