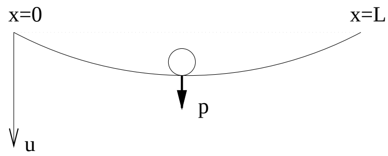
CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematik

# Transformer och differentialekvationer för M3 2007

## Inlämningsuppgift 4. Svängande strängar och balkar

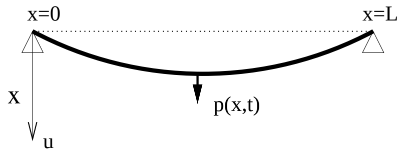
**1**. Figuren illustrerar en lina som är inspänd i ändpunkterna. Linan belastas med en rörlig last. Lasten börjar vid tiden $t = 0$ röra sig med konstant hastighet $v$ m/s från $x = 0$ till $x = L$ där den stannar. Den kommer då att ge upphov till en nedböjning av linan. Om vi bortser från gravitationens inverkan på linan och antar att spännkraften i linan är så stor att den kan anses konstant så kommer nedböjningen $u(x, t)$ att satisfiera vågekvationen med drivande kraft $p(x, t)$.




Ställ upp differentialekvation med randvillkor för att bestämma $u(x, t)$. Laplacetransformera differentialekvation och randvillkor med avseende på $t$ för fixt $x$, $0 < x < L$. För enkelhets skull betraktar vi lasten som en punktlast, $p\delta(x - vt)$. (Vid Laplacetransformering behöver du utnyttja att $\delta(x - vt) = \frac{1}{v}\delta(t - \frac{x}{v})$.) Du får då en ordinär differentialekvation för Laplacetransformen $U(x, s)$. Lös denna under förutsättning att $v \neq$ vågekvationens $c$.

$U(x, s)$ består bl.a. av termer av typen $\dfrac{\exp(\frac{sx}{c}) - \exp(-\frac{sx}{c})}{\exp(\frac{sL}{c}) - \exp(-\frac{sL}{c})}$. Dessa kan omformas till en summa av exponentialfunktioner, varefter $u$ kan bestämmas som en summa av oändligt många termer. Vid varje tidpunkt är endast ändligt många termer $\neq 0$. Sätt in lämpliga värden på $L$, $c$, $v$ och $p$ (i praktiken är $v$ väsentligt mindre än $c$, men det kan vara lämpligt att ta $c/v$ ungefär 2–5) och rita $u(x, t)$ så att man kan se vad som händer under och en liten stund efter lastens rörelse (tag med alla termer som inte är 0). Det är enklast och kanske också mest instruktivt att illustrera rörelsen genom att rita strängformen för ett antal $t$-värden (tillräckligt tätt; detta beror på valet av $c/v$).

**2**. Figuren illustrerar en balk som antingen är fast, fri eller ledat inspänd i ändpunkterna (tre alternativ i varje ändpunkt). Figuren illustrerar givetvis bara ett fall. Balken kan vara belastad av en last $p(x, t)$. Ställ upp en differentialekvation med randvillkor för att bestämma balkens nedböjning $u(x, t)$.




Antag att $p(x, t) = 0$ för $t > 0$ och att balkens nedböjning och rörelse vid $t = 0$ är kända. Nedböjningen kan då bestämmas med Fouriers metod. Se på fyra olika fall, som leder till ett självadjungerat, totaldefinit egenvärdesproblem i $x$-led (visa det). De ortogonalsystem du får här kallas nedan *balkens* ortogonalsystem. Dessa är naturligtvis olika vid olika randvillkor. Bestäm allmän lösning till problemet om balken är fast inspänd vid $x = 0$ och fri vid $x = L$. Sätt för enkelhets skull alla materialkonstanter och balkdimensioner till 1.

**3**. Antag att balken är fast inspänd vid $x = 0$ och fri vid $x = 1$. Balken belastas i mittpunkten med en punktlast $q$. Bestäm med integrering balkens form vid $t < 0$, då stationärt tillstånd inträtt och balken är i vila. Lasten tas bort vid $t = 0$ och balken svänger sedan fritt. Bestäm nedböjningen för $t > 0$. Du behöver inte räkna ut alla Fourierkoefficienterna men ställ upp integralerna och beräkna så många av de första koefficienterna som behövs för att approximationen vid $t = 0$ skall vara god. Rita grafer för dels nedböjningen du beräknat genom integration dels nedböjningen beräknad med Fourierutveckling. Du får naturligtvis beräkna alla integraler på valfritt sätt. Illustrera rörelsen genom att rita balkformen vid lämpliga tidpunkter med hjälp av Matlab/Mathematica.

**4**. (Överbetygsuppgift) a. Antag igen att balken är fast inspänd vid $x = 0$ och fri vid $x = 1$ och att den belastas av en punktlast $\sin(\Omega t)H(t)$ i mittpunkten. Bestäm balkens nedböjning $u(x, t)$, om $u(x, t) = 0$ för $t < 0$. Ledning: Gör en ansats där lastfunktionen och nedböjningen för fixt $t$ utvecklats i *balkens* ortogonalsystem $X_n(x)$ (se ovan). Varje ”svängningsmod” kan ses som ett linjärt, tidsinvariant, kausalt dynamiskt system. Koefficientfunktionerna kan därför bestämmas med hjälp av Laplacetransformering. Illustrera lösningen med hjälp av Matlab/Mathematica.

b. Antag nu att balken är fjädrat inspänd vid $x = 1$, dvs. ändpunkten kan röra sig, men det finns en återförande kraft som är proporionell mot avvikelsen från jämviktsläget. Ställ upp de nya randvillkoren och visa att även det nya problemet är självadjungerat och totaldefinit. Låt fjäderkonstanten vara 0.3 och bestäm även nu de första egenvärdena och tillhörande egenfunktioner (tag lika många som behövdes i deluppgift 3). Låt nu punktlasten vara $\operatorname{sgn} t\, e^{-|t|}$ för $-\infty < t < \infty$. Vad blir nedböjningen? Illustrera lösningen med hjälp av Matlab/Mathematica.