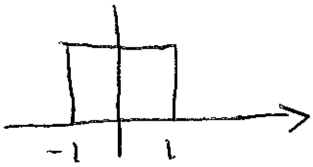
Några speciella $\mathcal{F}$-transformer

Tal 1: Om $f(t) = H(1-|t|)$, hitta $F(jw)$.

L: $H(1-|t|)$:



Vi får $F(jw) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jwt}\, dt$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-jwt}\, dt = \left[\frac{-e^{-jwt}}{jw} \right]_{-1}^{1} = \frac{j}{w}\left(e^{-jw} - e^{jw}\right)$$

$$= \frac{j}{w}\left(\cos w - j\sin(w) - (\cos(w) + j\sin(w))\right) = 2\,\frac{\sin w}{w}$$

Anm: $\frac{\sin w}{w}$ är så viktig/vanlig att den ibland skrivs $\operatorname{sinc} w = \frac{\sin w}{w}$. $\Leftarrow$ vi!

Bara för att förvilla menar vissa att
$$\operatorname{sinc} w = \frac{\sin \pi w}{\pi w}.$$

OBS! $\operatorname{sinc} 0 = 1$!

På liknande sätt fås

$$\mathcal{F}\{H(T-|t|)\} = 2T \operatorname{sinc}(wT)$$

Om vi sedan tar $\mathcal{F}^{-1}$ fås

$$H(T-|t|) = \mathcal{F}^{-1}\{2T \operatorname{sinc}(wT)\} = \frac{T}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(wT)\, e^{jwt}\, dw$$

Om $t=0$ får vi

$$1 = \frac{T}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\,d\omega$$

och $\Rightarrow$

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega T)}{\omega}\,d\omega$$

"Kommer tillbaka senare"

Tal 2: Hitta $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}$ och $\mathcal{F}\{1\}$

L: $$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega t_0}$$

s.a. $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$.

Då $\mathcal{F}$ o $\mathcal{F}^{-1}$ är nästan samma gissar

vi $\mathcal{F}\{1\} = C\,\delta(\omega)$. Vi får

$$\mathcal{F}^{-1}\{C\,\delta(\omega)\} = \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{C}{2\pi} = 1 \quad \text{om } C = 2\pi$$

Anm: 1/ Då $\delta(t)$, $\delta(\omega)$ är generaliserade fkn

kallas transformen generaliserad Fourier-transf.

2/ Som ovan fås $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

"använd förskj.-regel alt räkna"

Vi får att

$$\mathcal{F}\Big\{ \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}}_{\text{F-serie}} \Big\} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)}_{\text{kallas för impulståg.}}$$

Ex: Låt $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ vara ett periodiskt impulståg, med period T.

Vi kan (?) Fourierutveckla $f(t)$ och får

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t-lT) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$l \neq 0 \Rightarrow$ utanför $-T/2, T/2$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}$$

OBS: F-transf. F-serien!

så

$$\mathcal{F}\Big\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \Big\} = \mathcal{F}\Big\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \Big\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

ett nytt impulståg! //

"visa Ftrans"

Ex: Vad är $\mathcal{F}\{H(t)\}$?

Vi har att $H'(t) = \delta(t) \Rightarrow \underline{j\omega \mathcal{F}\{H\}(j\omega) = 1}$ (1)

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \; \mathcal{F}\{\delta\}(j\omega)$

$j\omega \mathcal{F}\{H\}(j\omega) = \mathcal{F}\{H'\} = \mathcal{F}\{\delta\} = 1$

Vi har att (*) uppfylls av

$$\mathcal{F}\{H\}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + c\,\delta(\omega)$$

ty $\omega \cdot \delta(\omega) = 0$

Låt oss hitta c.
Vi får

$$H(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega} + c\,\delta(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{j\omega} + c\,\delta(\omega)\right)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\,d\omega}_{\substack{=0\\ \text{udda}}} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,d\omega}_{=\begin{cases}\pi & t>0\\ -\pi & t<0\end{cases}} + \frac{c}{2\pi}$$

ovan!

$$= 0 \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = H(t)$$

$$\Rightarrow \quad c = \pi, \text{ dvs} \qquad \underline{\mathcal{F}\{H\}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)}$$

<u>Fourier transform av faltning</u>

Vi har $$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\, e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt\,d\tau = \left\{\begin{matrix} t-\tau = s \\ dt = ds\end{matrix}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,e^{-j\omega(\tau+s)}\,ds\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-jw\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-jws}ds = F(jw)\,G(jw)$$

p.s.s. $\mathcal{F}^{-1}\{(\cancel{F}* G)(jw)\cdot\frac{1}{2\pi}\} = f(t)g(t)$

Tal: Hitta $\mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\}$

L:

$$(f*H)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\} = \mathcal{F}\{(f*H)(t)\} = F(jw)\,\mathcal{F}\{H\}(jw)$$

$$= F(jw)\left(\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)\right) = \frac{1}{jw}F(jw) + \pi F(0)\delta(w)$$

Filter

(Kom ihåg:) Om $u(t)$ har $\mathcal{F}$-transf. $U(jw)$

och T är ett stabilt LTI-system

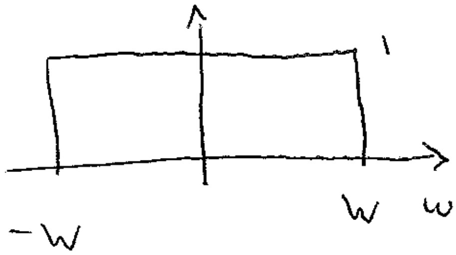
(s.a. impulssvaret har en $\mathcal{F}$-transf. $G(jw)$)

så blir utsignalen

$$x(t) = (g*u)(t)$$

$$X(jw) = G(jw)\,U(jw)$$

Om $G(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| \geq W \end{cases}$



Så har vi filtrerat ut alla frekvenser ω s.a. $|\omega| \geq W$!

<u>Anm:</u> 1) Filtret ovan kallas för <u>idealiskt lågpassfilter</u>

2) Tyvärr är konstruktion av sådana omöjliga.

Pga 2) får vi nöja oss med approximationer.

Butterworth föreslog $G_B(j\omega)$ där

$$|G_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$

vilket ger (med ren del räkning och $n=2$)

$$G_B(j\omega) = \frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + j\sqrt{2}\,\omega_c\omega + \omega_c^2}$$

"Bilder på $|G_B(j\omega)|^2$"

"Ex på in-ut med $n=2$"

Hittills har vi diskuterat

1/ Fourier-serier F7 – F8

2/ Fourier-transform av L^1-fkner $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$

L^1: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$

3/ Generaliserade Fourier-transformer av $\delta(\omega-\omega_0)$, periodiska fkner $\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\right)$ impulståg etc.

Nu skall vi göra 4/ diskreta Fourier-transformer.

Def: Tag en sekvens $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ och låt

$$G_d(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\omega}.$$

Detta kallas för (sekvens-) $\mathcal{F}$-transf. av sekvensen $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Anm: 1/ Vi skriver ibland $\mathcal{F}\{g_n\}$, $\mathcal{F}\{\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\}$

2/ Det faktum att vi $\mathcal{F}$-transf. en diskret sekvens $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ gör att vi ofta skippar $G_d(j\omega)$ och skriver $G(j\omega)$.

3/ $\{g_n\}$ diskret, men $G(j\omega)$ ~~kont~~ (def $\forall\omega$)

Kom ihåg: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{jkw} e^{-jnw} dw = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 2\pi & k = n. \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} G(jw) e^{jkw} dw = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jnw} e^{jkw} dw$$

$= 2\pi g_k$ s.a. $g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(jw) e^{jkw} dw$

Om vi har $G(jw)$ kan vi återskapa $\{g_n\}$?

Ja ("vanligt sätt"). Måste vi känna till hela fkn $G(jw)$ för denna återskapning?

<u>Sats:</u> Antag att $g_0, g_1, \ldots, g_{N-1}$ är s.a.

$g_k = g(k\Delta t)$ för ngn kont.- fkn $g(t)$

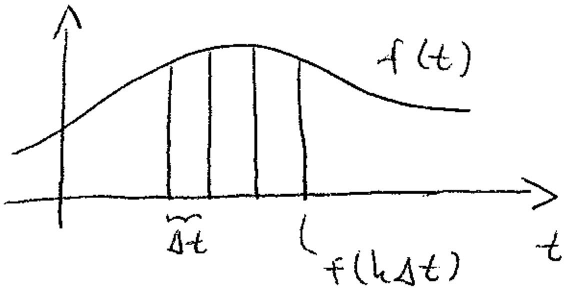
(och att Δt är ngt fixt tidsintervall).

Om $$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}$$

Så är $$g_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}$$

<u>Anm:</u> Sekvensen $\{G_k\}_{k=0}^{N-1}$ definierar den diskreta Fourier transformen (DFT) av sekvensen $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$.

<u>Sampling</u> Vi har



Mha $\{f(k\Delta t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ kan vi bilda

$$f_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\,\delta(t-k\Delta t)$$

ett impulståg!

Hur relateras $F_s(j\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\}$ och $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$? Vi har

$$F_s(j\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\,\delta(t-k\Delta t)\right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\Delta t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\Delta t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \frac{2\pi}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{\Delta t}\right)$$

förra gången

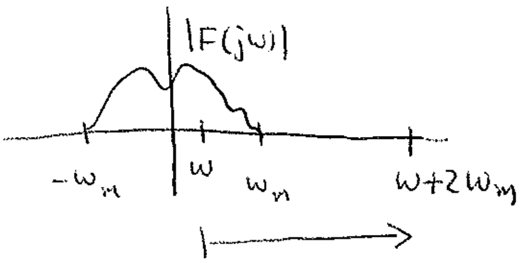
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega - k\frac{2\pi}{\Delta t}\right)\right) \quad //$$

Anm: $F_s\left(j\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta t}\right)\right) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\Big(j\big(\omega+\underbrace{\tfrac{2\pi}{\Delta t}-k\tfrac{2\pi}{\Delta t}}_{-\frac{2\pi}{\Delta t}(k-1)}\big)\Big)$

$= F_s(j\omega)$ periodisk!

Inte helt sällan är $|F(j\omega)| = 0$ för $|\omega| > \omega_m$. Detta kallas för att $f(t)$ har begränsad bandbredd.

Om $\omega \in [-\omega_m, \omega_m]$ och $\frac{2\pi}{\Delta t} > 2\omega_m$ så får vi att $F\left(j\left(\omega+k\frac{2\pi}{\Delta t}\right)\right) = 0$ om $k \neq 0$



Om Δt väljs för stort får vi att $\frac{2\pi}{\Delta t} < 2\omega_m$ vilket är kasst "visa bilder".

Villkoret $\Delta t < \frac{\pi}{\omega_m}$ kallas för Nyquist kriteriet.

Om $\Delta t < \frac{\pi}{\omega_m}$ så är

$$F(j\omega) = \Delta t \, F_s(j\omega) \, H(\omega_m - |\omega|)$$ "ta med i bild"

Vi får att

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \Delta t \, \mathcal{F}^{-1}\{F_s(j\omega)\} * \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega_m - |\omega|)\}$$

$$= \Delta t \, f_s(t) * \frac{\sin \omega_m t}{\pi t}$$

$$= \Delta t \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \, \delta(t - k\Delta t) \right) * \frac{\sin \omega_m t}{\pi t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \, \Delta t \, \frac{\sin(\omega_m (t - k\Delta t))}{\pi (t - k\Delta t)}$$

$\boxed{f(t) \text{ kan (perfekt) återskapas från } \{f(k\Delta t)\}_{k=-\infty}^{\infty}}$

Observera att

$$F_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) e^{-j\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \, \delta(t - k\Delta t) e^{-j\omega t} \, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) e^{-j\omega t} \, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) e^{-j\omega k \Delta t}$$

S.a. $F_s(j\omega)$ är (sekvens-)

Fourier transformen av sekvensen $\{f(k\Delta t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$