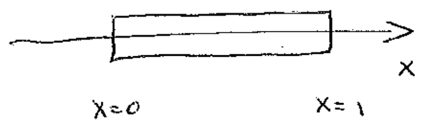
ToD MVE100

PDE-lösningar mha variabelseparation

Värmeledning

stav (endimensionell)



Om $u(x,t)$ är temperaturen i punkten x vid tiden t gäller

$$u_t'(x,t) = k\,u_{xx}''(x,t) \qquad \text{(PDE)}$$

där k reflekterar materialets värmeledningsförmåga.

Vi antar följande villkor

(RV) $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall\, t>0$ "temp 0 i ändarna"

(BV) $u(x,0) = f(x)$ ← "värmeförd. vid $t=0$"

Vi löser först PDE och använder sedan (RV) o (BV).

Lösning PDE: Vi ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$

Vi får

$$X(x)T'(t) = u_t'(x,t) = k\,u_{xx}''(x,t) = k\,X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{ober. av } t} = \underbrace{\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{ober. av } x}$$

Då måste det $\exists\ \lambda$ s.a.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

$$\Rightarrow \quad X''(x) = -\lambda X(x) \quad (X\text{-ODE})$$
$$T'(t) = -\lambda k T(t) \quad (T\text{-ODE})$$

så en PDE är nu 2 ODE!

Lös X-ode: Fall 1: $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$

RV: $\left.\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ X(1) &= C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Fall 2: $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$

RV: $\left.\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0 \\ X(1) &= C_1 + C_2 = C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Fall 3: $\lambda > 0$! $\Rightarrow X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

RV: $X(0) = C_1 = 0$

$X(1) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$

$\Rightarrow C_2 = 0$ eller $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$.

Dvs:

> En icke-trivial lösning till X-ODE med RV $\exists$ omm $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^+$

Vi har $X(x) = C_2 \sin(n\pi x)$ löser X-ODE

Lös T-ODE med $\lambda = n^2\pi^2$: $T'(t) = -n^2\pi^2 k\, T(t)$

$$\Rightarrow \quad T(t) = C_3 e^{-n^2\pi^2 k t}$$

Så $\quad u(x,t) = X(x)T(t) = C\sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 kt}$

löser PDE och uppfyller (RV).

Hur skall vi fixa (BV)?

Häri ligger genialiteten hos Fourier:

1) Även $\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 kt}$

löser PDE & (RV).

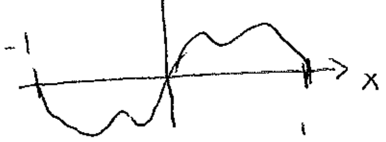
2)
$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

om vi skall uppfylla (BV). Detta fungerar

om vi väljer b_n som Fourier-sinus-koeff.

till $f(x)$ på $(0,1)$!!

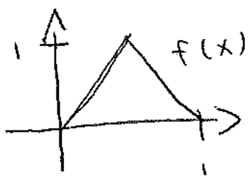
udda utv.



Vi låter
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx$$
$$= 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

<u>Tal:</u> Lös värmeledningsekv. med (RV) & (BV)

som ovan om $\quad f(x) = 1 - |2x-1|$



1 (mkt kort):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin(n\pi x)$$

dvs $b_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

s.a.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 kt} \quad //$$

"visa värmeledning 2 & 3 (motsvarar $f(x) \equiv 1$)"
VL1, VL2

Anm: 1) Andra $f(x)$ ger andra b_n men annars samma.

2) Lösningsmetoden fungerar därför att

a) $\sin(n\pi x)$ löser

$$\left.\begin{aligned} D^2 \underline{X} &= -\lambda \underline{X} \\ \underline{X}(0) &= \underline{X}(1) = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

dvs $\sin(n\pi x)$ är <u>egenfunktioner</u> till egenvärdesproblemet (*).

b) $\{\sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett <u>fullständigt</u> ortogonalsystem (dvs "alla" $f(x)$ kan utvecklas i en sinus-serie på $[0,1]$). på vektorrummet

$$V = \{ f \in L^2([0,1]) : f(0) = 0,\ f(1) = 0 \}$$

3) Andra ekvationer har (om man har tur) ibland en annan uppsättning lösningar $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Om dessa utgör ett <u>fullständigt</u> ortogonalsystem på lämpligt vektorrum kan man göra i princip samma sak som ovan.

Betrakta återigen

$$u'_t(x,t) = k\, u''_{xx}(x,t)$$

fast nu med RV

RV1: $u'_x(0,t) = 0$ (ingen värmeströmning i $x=0$, isolering!)

RV2: $u'_x(1,t) = -h\,u(1,t)$ (värmeflöde enl. Newtons avkylningslag: $u'_x = h\,(T-u)$ med $T=0$)

De nya RV leder till

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ X'(0) = 0, \quad X'(1) + h X(1) = 0 \end{cases}$$

RV1 är ett Neumann-villkor medans

RV2 är ett Robin-villkor.

Samma metod som förut ger för $\lambda > 0$:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$

RV1: $X'(0) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0)$

$= C_2\sqrt{\lambda} = 0 \implies C_2 = 0.$

RV2: $h X(1) + X'(1) = h\cdot C_1\cdot\cos(\sqrt{\lambda}) - C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})$

$= C_1\left(h\cos(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right) = 0$

$\implies \tan\sqrt{\lambda} = \dfrac{h}{\sqrt{\lambda}}.$

"visa bild på lösningar, ~~[illegible]~~ till ekv" TL(5)

Kalla lösningarna till $\tan\sqrt{\lambda} = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}$

för $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Då får vi att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)\, e^{-\lambda_n k t}$$

som förra gången.

Dessutom gäller att $\{\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalt system på

$$V = \{ f \in L^2([0,1]) : f'(0) = 0,\ h f(1) + f'(1) = 0 \}.$$

Så om $f \in V$ kan vi uppfylla begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ genom att ~~ta~~ välja b_n s.a. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)$

dvs
$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)\, dx$$

"visa lösning 5; varme 4"
VL3

Anm: Om vi låter $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ där f, g reell-värda så gäller ~~att~~ i båda fallen ovan att

$$b_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}$$

Kontroll: Låt $\phi_n = \sin(n\pi x) \Rightarrow$

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \cdots = \frac{1}{2} \quad \text{så att}$$

$$\frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\| \phi_n \|^2} = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)dx}{\int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx}$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)dx. \quad \text{som innan.}$$

Värmeledning forts

Kom ihåg: $u'_t - k u''_{xx} = 0$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

löses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 kt}$$

Vi väljer nu att betrakta

$$u'_t - k u''_{xx} = g(x,t) \quad (*)$$

dvs vi tillför värme till systemet.

Vi söker en partikulärlösning:

Vi utvecklar $g(x,t)$ i basen $\{\sin(n\pi x)\}$

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin(n\pi x) \quad \text{med}$$ "tidsber. F-koeff"

$$g_n(t) = 2\int_0^1 g(x,t)\sin(n\pi x)\,dx$$

och ansätter

$$u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\pi x).$$

Från $(*)$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n'(t) + k(n\pi)^2 u_n(t)\right) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin(n\pi x)$$

s.a.

$$u_n'(t) + kn^2\pi^2 u_n(t) = g_n(t) \quad \forall n. \quad (U_n\text{-ODE})$$

Detta är en vanlig ODE som vi löser

på "klassiskt" vis. (Laplace, int. faktor...)

Om $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ får beteckna lösningar till u_n-ODE

uppfyller $u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(t) \sin(n\pi x)$

PDE'n (*).

Den allmänna lösningen (som uppfyller (RV) & (BV))

blir då

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-kn^2\pi^2 t} + \bar{u}_n(t) \right) \sin(n\pi x)$$

där

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx - \bar{u}_n(0).$$

<u>EX:</u> Låt $g(x,t) = \delta(x-\frac{1}{2})$ och $f(x) \equiv 0$

så blir $g_n(t) = 2\int_0^1 \delta(x-\frac{1}{2})\sin(n\pi x)\,dx = 2\sin(n\frac{\pi}{2})$.

Vi löser sedan

$$u_n'(t) + kn^2\pi^2 u_n(t) = 2\sin(n\tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}_n(t) = e^{-kn^2\pi^2 t} + \frac{2}{kn^2\pi^2}\sin(n\tfrac{\pi}{2}).$$

Då blir

$$b_n = -\bar{u}_n(0) = -1 - \frac{2}{kn^2\pi^2}\sin(n\tfrac{\pi}{2})$$

Så att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-1-\frac{2}{kn^2\pi^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)e^{-kn^2\pi^2 t} + e^{-kn^2\pi^2 t} + \frac{2}{kn^2\pi^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin(n\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{-kn^2\pi^2 t}\right)\frac{2}{kn^2\pi^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(n\pi x)$$

"visa VL 4, VL 5"

Metoden vi har demonstrerat ~~fungar~~ för värmeledning fungerar för en mängd andra situationer:

1) Vågekvationen 9.3.2 i GJ, ~~3~~.2 i DE $\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2) Laplace ekvation 9.5.1. i GJ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
(elektromagnetism, fluid dynamik...)

3) Böja balk: $\quad EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \quad$ (last).

5.3 i DE

Låt oss översiktligt titta på vibrerande sträng.

Man får ekvationen

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$$ (c ~ material egenskap masstäthet/spännkraft)

Våra bivillkor blir

(RV) $u(0,t) = u(1,t) = 0$ (strängen förankrad i ändarna)

(BV) $\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \text{(initial position)} \\ u'_t(x,0) = g(x) & \text{(utgångshastighet)} \end{cases}$

Om vi återigen ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$

får vi

$$\left.\begin{array}{l} X''(x) = -\lambda X(x) \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0 \end{array}\right\} \text{ODE + (RV)}$$

$$T''(t) = -\lambda c^2 T(t) \quad \text{T-ODE}$$

koefficienter väljs sedan s.a. (BV) blir uppfyllda:

Steg 1: ODE + (RV) ger lösningarna

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (\lambda = n^2\pi^2)$$

Steg 2: T-ODE med $\lambda = n^2\pi^2$ ger lösningarna

$$T_n(t) = a_n \cos(n\pi c t) + b_n \sin(n\pi c t)$$

Steg 3: Ihopsättning ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\left(a_n \cos(n\pi c t) + b_n \sin(n\pi c t)\right)$$

Steg 4: (BV) ger

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) = f(x)$$

$$u'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi c \sin(n\pi x) = g(x)$$

s.a.

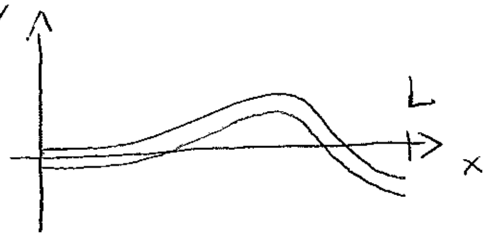
$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

"Visa svängstång"

Anm: Kortfattad lösning enl. ovan är ok på en Inlupp!

Svängande balk:



$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \leftarrow \text{last} \quad (=0 \text{ här})$$

$$(RV)\begin{cases} y(0,t)=0 \\ y'_x(0,t)=0 \end{cases} \text{fast spänning}$$

$$\begin{cases} y''_{xx}(L,t)=0 & \text{böjmoment} = 0 \\ y''''_{xxxx}(L,t)=0 & \text{skjuvspänning} = 0 \end{cases}$$

Ansättning $y(x,t) = X(x)T(t)$ leder till

$$X\text{-ODE} \quad \begin{cases} X^{(4)}(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X'(0) = X''(L) = X^{(3)}(L) = 0 \end{cases}$$

(Återigen ett egenvärdesproblem: $D^4 X = \lambda X$.)

och

$$T''(t) + \frac{EI\lambda}{m} T(t) = 0. \qquad (T\text{-ODE})$$

<u>Steg 1:</u> Lös X-ODE:

$$X(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax) + C_3 \cosh(ax) + C_4 \sinh(ax)$$

där $a^4 = \lambda$ (der. $\cos(ax)$ 4 ggr: $a^4 \cos(ax)$ etc.)

RV ger (ett par sidors jobb)

$$X_n(x) = C\left[(\sin(r_n) + \sinh(r_n))\left(\cos\frac{r_n x}{L} - \cosh\frac{r_n x}{L}\right) - (\cos r_n + \cosh r_n)\left(\sin\frac{r_n x}{L} - \sinh\frac{r_n x}{L}\right)\right]$$

där $r_1, r_2, \ldots$ är rötter till ekv.

$$\cos x = \frac{-1}{\cosh x}$$

och $\lambda_n = \dfrac{r_n^4}{L^4}$ $n = 1, 2, \ldots$

<u>Steg 2:</u> Låt $\omega_n^2 = \dfrac{EI \cdot \lambda_n}{m}$ T-ODE ger

$$T_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t$$

Steg 3/4:

$$\cancel{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(t)$$

$$\cancel{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x) = f(x)$$

$$y'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x) = g(x)$$

$$\alpha_n = \frac{\langle X_n(x), f(x)\rangle}{\|X_n\|^2} \qquad \beta_n = \frac{\langle X_n(x), g(x)\rangle}{\|X_n(x)\|^2}$$

Om $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ är en ortogonal bas!?

PDE och Laplace

Om $u = u(x,t)$ så består en typish ODE av

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Innan har vi $\mathcal{L}$-transformerat $f(t), f'(t), f''(t)$ etc

Vad får vi nu?

1) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt \underset{\text{är ok!}}{=} \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}U(x,s) \qquad \text{(obs: } \mathcal{L}\text{-transf. sker bara i } t\text{-var!)}$$

2) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}U(x,s)\right) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

3) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt \overset{\text{P.I.}}{=} \left[u(x,t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty u(x,t)(-se^{-st})\,dt$$

$$= 0 - u(x,0) + s\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}\,dt = sU(x,s) - u(x,0)$$

om $u(x,t)$ ej växer snabbare än e^{st}

4) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \left\{\text{låt } v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = sV(x,s) - V(x,0)$$

$$= s\,\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = s(sU(x,s) - u(x,0)) - u_t'(x,0)$$

$$= s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t'(x,0)$$

Låt oss åter betrakta

PDE $\quad u'_t(x,t) = k\, u''_{xx}(x,t)$

(RV) $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$

(BV) $\quad u(x,0) = 1, \quad 0 < x < 1$

steg 1:
$\mathcal{L}$ - transform ger:

$$sU(x,s) - \underbrace{u(x,0)}_{=1} = kU''_{xx}(x,s)$$

För varje fixt s är detta en ODE i x.

Vi kan lösa denna på "vanligt" sätt:

$$U(x,s) = \underbrace{C_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x}}_{\text{homogen}} + \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{part.}}$$

steg 2: Utnyttja (RV)

$$U(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty 0\,dt = 0 = U(1,s)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + \frac{1}{s} &= 0 \\ C_1 e^{\sqrt{s/k}} + C_2 e^{-\sqrt{s/k}} + \frac{1}{s} &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{s/k}} & e^{-\sqrt{s/k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s\,\underbrace{\left(e^{\sqrt{s/k}} - e^{-\sqrt{s/k}}\right)}_{2\sinh(\sqrt{s/k})}} \begin{bmatrix} e^{-\sqrt{s/k}} & -1 \\ -e^{\sqrt{s/k}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ToD MVE100 $\boxed{F14}$ (3)

$$\Rightarrow \quad U(x,s) = \frac{1}{2s\sinh(\sqrt{s/k})}\left(\left(e^{-\sqrt{s/k}}-1\right)e^{\sqrt{s/k}\,x} + \left(1-e^{+\sqrt{s/k}}\right)e^{-\sqrt{s/k}\,x}\right)+\frac{1}{s}$$

Nu shall vi "bara" invers transformera!

1) Matlab har ingen chans!

2) Man kan använda invers-integralen. Mkt svårt...

3) Tabell, men vi måste ha en bra...

<u>Lösn. mha 3):</u>

$$\frac{1}{2\sinh(\sqrt{s/k})} = \frac{1}{\left(e^{\sqrt{s/k}}-e^{-\sqrt{s/k}}\right)} = e^{-\sqrt{s/k}}\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{s/k}}}$$

$$= e^{-\sqrt{s/k}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s/k}}$$

och

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-\sqrt{a s}}\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}\right) = \cancel{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}} e^{-\tau^2}\,d\tau}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau$$

Vi får

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{s/k}}e^{-2n\sqrt{s/k}}\left(\left(e^{-\sqrt{s/k}}-1\right)e^{\sqrt{s/k}\,x}+\left(1-e^{\sqrt{s/k}}\right)e^{-\sqrt{s/k}\,x}\right)\right\}$$

$$= 1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{2+2n-x}{2\sqrt{kt}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{1+2n-x}{2\sqrt{kt}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\frac{1+2n+x}{2\sqrt{kt}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

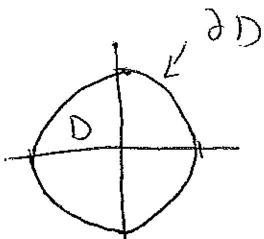
"visa VL6"

Dylika utökade tabeller kan man hitta online.

Flera rumsdimensioner

I allmänhet krävs numeriska metoder, men vissa (viktiga) specialfall kan utredas analytiskt.

Vibrerande membran



vågekvationen:

$$\begin{cases} u''_{tt} = c^2(u''_{xx} + u''_{yy}) & (x,y) \in D, \quad x^2+y^2 \le 1 \\ u = 0 \quad \text{på } \partial D & \text{dvs } u(x,y) = 0 \text{ om } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Steg 1:
Polära koordinater är rimligt så låt

$$x = r\cos\theta \quad \text{där } 0 \le r \le 1$$
$$y = r\sin\theta \quad\quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = u'_r \cdot \frac{x}{r}$$

ty $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$

p.s.s.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dots = \text{härke} \quad \text{och man får}$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\theta\theta}$$

Det är rimligt att vibrationerna är radiellt symmetriska och $\Rightarrow u''_{\theta\theta}=0$.
$(u'_{\theta}=0)$.

Vårt nya problem är

$$\begin{cases} u''_{tt} = c^2\left(u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r\right) \\ u(1,t)=0 \end{cases}$$

Vi har reducerat problemet till en (rums-)dimension!

Steg 2:
Nu ansätter vi $u(r,t) = R(r)T(t)$ och får

$$-rR''(r) - R'(r) = \lambda^2 r R(r) \qquad R\text{-ODE}$$
$$R(1)=0$$
$$T''(t) = -\lambda^2 c^2 T(t) \qquad T\text{-ODE}$$

R-ODE'n är välkänd och alla begränsade lösningar är

$$R(r) = c\, J_0(\lambda r)$$

där J_0 är en s.k. Besselfunktion av ordning 0. Då $R(1)=0$ får vi

$$J_0(\lambda)=0$$

som har lösningarna $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$

"visa Bessel"

<u>Steg 3:</u> Lös T-ODE och hitta

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(c\lambda_n t) + b_n \sin(c\lambda_n t)\right) J_0(\lambda_n r)$$

<u>Steg 4:</u> Vi väljer a_n, b_n mha Fourier-metoden. Detta använder att $\{J_0(\lambda_n r)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem på

$$V = \{ f \in L^2,\ f(1) = 0 \}.$$