ToD MVE100 $\boxed{F15}$ ①

Kom ihåg: Om D är en differential-operator så gäller $Du(x) = u'(x)$.

Mer allmänna typer kan se ut som

1)
$$f(D) = f_n(x)D^n + \dots + f_1(x)D + f_0(x)$$
$\uparrow$ x-beroende koeff.

s.a.
$$f(D)u = f_n(x)u^{(n)}(x) + \dots + f_1(x)u'(x) + f_0(x)u(x).$$

2)
$$A = D\,q(x)\,D^2 \quad \text{s.a.} \quad Au = D\,q(x)\,D^2u$$
$$= D\big(q(x)u''(x)\big) \big(= q'u'' + qu'''\big)$$

I vad som följer kommer A, B vara diff-operatorer av typerna 1) eller 2). Vi kommer betrakta följande <u>egenvärdes-problem</u>

$$\left.\begin{aligned} Bu &= \lambda Au \\ u &\in V \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Här är V rummet av alla funktioner som är deriverbara tillräckligt antal gånger ($B = D^7$, $u^{(7)}(x)$ måste $\exists$) och som uppfyller ett antal linjära, homogena randvillkor ($u(a) = 0$, $u''(b) = 0$ etc). V kallas ibland rummet av <u>testfunktioner</u>.

Ex: Om $B = D^2$ och $A = 2xD$ samt

$V = \{u \in L^2([0,1]) : u'(0) = u(0) = 0\}$ så är

(*) $\begin{cases} u''(x) = \lambda 2x u'(x) & \text{med RV:} \\ u'(0) = u(0) = 0 \end{cases}$

Om (*) löses för ett specifikt värde på λ så är λ ett <u>egenvärde</u> och motsvarande lösning $u(x)$ en <u>egenfunktion</u>.

<u>OBS:</u> Ett egenvärde λ kan motsvaras av multipla egenfunktioner $u_1, u_2, \dots, u_m$. Då har vi att

$$B(u_1 + \dots + u_n) = Bu_1 + Bu_2 + \dots + Bu_m$$

$$= \lambda u_1 + \dots + \lambda u_n = \lambda(u_1 + \dots + u_m).$$

Därför bildar $u_1, \dots, u_m$ ett <u>underrum</u> U_λ till V.

<u>Kom ihåg!</u> U_λ är ett underrum till V om $u, v \in U_\lambda \Rightarrow au + bv \in U_\lambda \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Kom ihåg! Om A är en symmetrisk $n \times n$-matris, dvs $A^T = A$ så gäller att (för u, v vektorer)

$$u^T A^T v = u^T A v \iff (Au)^T v = u^T A v$$

$$\iff \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

Om u, v är <u>funktioner</u> med skalärprodukten

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) v(x) \quad \text{på } L^2([a,b])$$

så är operatorn A symmetrisk på V om $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad \forall\, u, v \in V$.

<u>Ex:</u> Låt $A = D^2$ och $V = \{ u \in L^2([a,b]) : u'' \exists$ och $u(a) = u(b) = 0 \}$. Vi får då

$$\langle Au, v \rangle = \langle u'', v \rangle = \int_a^b u''(x) \cdot v(x)\, dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \Big[u'(x) v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x) v'(x)\, dx$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ v(a) = v(b) = 0}}{0} - \Big[u(x) v'(x) \Big]_a^b + \int_a^b u(x) v''(x)\, dx = \langle u, v'' \rangle = \langle u, Av \rangle$$

Kom ihåg! Om $\underset{\substack{\wedge \\ \text{symmetrisk}}}{A}$ $n \times n$-matris och u vektor

Så är A positivt semi-definit

om $\langle Au, u\rangle \geq 0$ $\forall$ vektorer u.

Om likhet i uppfylls enbart av $u \equiv 0$

så är A positivt definit.

<u>Def:</u> 1) En symmetrisk diff-operator A

är positivt semi-definit på V om

$$\langle Au, u\rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in V.$$

2) A är positivt definit om likhet enbart

uppnås då $u(x) \equiv 0$.

<u>Ex (forts):</u> För $A = -D^2$ och $V = \{u \in L^2([a,b]) : u(a) = u(b) = 0\}$

har vi att $\langle Au, u\rangle = \langle -u'', u\rangle = \int_a^b (u'(x))^2 dx \geq 0$.

A är positivt definit då

$$\int_a^b (u'(x))^2 dx = 0 \Rightarrow u'(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x) = c$$

men då $u(a) = 0 \Rightarrow c = 0$

Egenvärdesproblemet $\begin{cases} Bu = \lambda Au \\ u \in V \end{cases}$

är <u>självadjungerat</u> på V om A, B är symmetriska på V.

Om A, B dessutom är positivt definita på V sägs problemet vara <u>totaldefinit</u>

Relevansen av dessa begrepp kommer bland annat när vi vill veta om lösningarna till ett egenvärdesproblem bildar ett <u>ortogonalt system.</u>

<u>Sats</u> 1/ Ett totaldefinit egenvärdesproblem

$$\begin{cases} Bu = \lambda Au \\ u \in V \end{cases}$$

har enbart reella och positiva egenvärden ($\lambda > 0$).

2/ Motsvarande egenfunktioner u kan väljas reella

3/ Om $\lambda_1 \neq \lambda_2$ och u_1, u_2 är motsvarande egenfunktioner, så är u_1, u_2 A-ortogonala dvs

$$\langle Au_1, u_2 \rangle = 0.$$

<u>B:</u> Fungerar exakt likadant som när A matris och u funktion. (se 26-28 i DE)

B: 3) Antag $Bu_1 = \lambda_1 A u_1$, $Bu_2 = \lambda_2 A u_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow \lambda_1 \langle Au_1, u_2 \rangle = \langle \lambda_1 A u_1, u_2 \rangle = \langle Bu_1, u_2 \rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ symm.}}}{=} \langle u_1, Bu_2 \rangle = \langle u_1, \lambda_2 A u_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, Au_2 \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ symm.}}}{=} \lambda_2 \langle Au_1, u_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Au_1, u_2 \rangle = 0 \quad (\text{ty } \lambda_1 \neq \lambda_2) \qquad \square$$

"Sats:" För totaldefinita egenvärdesproblem och många självadjungerade — " — kan man hitta egenfunktioner $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ som bildar ett fullständigt A-ortogonals system på $L^2([a,b])$

ToD MVE100

F16 ①

Betrakta följande egenvärdesproblem:

$$\left.\begin{aligned} &-D(p(x)u') + q(x)u = \lambda w(x)u \\ &(RV)\begin{cases} a_1 u'(a) - a_2 u(a) = 0 \\ b_1 u'(b) + b_2 u(b) = 0 \end{cases}\end{aligned}\right\} \circledast$$

där $1/p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ för $a \leq x \leq b$ och $w(x) > 0$ för $a < x < b$.

2) p, q, w reella kont på $[a,b]$

3) $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ och $\max(a_1, a_2) > 0$, $\max(b_1, b_2) > 0$

Detta kallas för ett Sturm-Liouville problem.

Anm: Dessa uppkommer ofta vid användande av variabel-sep. metoden.

Ex 1: Betrakta värmeledningsekv.

$$u'_t = k u''_{xx}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

Variabel-sep gav

$$-X'' = \lambda X$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

Här är $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $w(x) \equiv 1$

och $+a_2 = b_2 = 1$ i ⊛

Ex 2: En mer allmän form av värmel.-ekv.

är $\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right)$

Dessa kommer från materialegenskaper

Vi ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ s.a.

vi får $\sigma(x) X(x) T'(t) = D_x(k(x) X'(x)) T(t)$

$$\Rightarrow \frac{\sigma(x) X(x)}{D_x(k(x) X'(x))} = \frac{T(t)}{T'(t)} = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow -D(k(x) X'(x)) = +\lambda \sigma(x) X(x)$$

Här är $p(x) = k(x)$, $q(x) \equiv 0$, $w(x) = \sigma(x)$

Vi har följande sats

Sats: Sturm-Liouvilles egenvärdesproblem är självadjungerat och positivt semidefinit. Om $q(x) \not\equiv 0$ eller $\max(a_2, b_2) > 0$ så är problemet positivt definit. (Om ej är $\lambda = 0$ egenvärde till $u(x) \equiv C \neq 0$.)

Följd: Mha det vi diskuterade förra gången följer att egenfunktionerna till (*) utgör ett ortogonalt system. Det är tack vare detta som Fouriers metod fungerar.

B: (i fallet $u(a)=u(b)=0$, se 48-49 i DE allmänt fall)
Här är $A=w$, $B=-DpD+q$

Steg 1 (A symm)

$$\langle Au,v\rangle=\int_a^b w(x)u(x)v(x)dx=\int_a^b u(x)\left(w(x)v(x)\right)dx=\langle u,Av\rangle$$

Steg 2 (B symm): $u,v\in V$

$$\langle Bu,v\rangle=\langle -DpDu+qu,v\rangle$$

$$=\langle -Dpu'+qu,v\rangle=\int_a^b -D[p(x)u'(x)]\,v(x)dx+\int_a^b q(x)u(x)v(x)dx$$

$$=\underbrace{\Big[-p(x)u'(x)v(x)\Big]_a^b}_{=0 \text{ ty } v(a)=v(b)=0}+\int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx+\int_a^b q(x)u(x)v(x)dx$$

D.S.S. $\langle u,Bv\rangle=\langle Bv,u\rangle=0+\int_a^b p(x)v'(x)u'(x)dx$

$$+\int_a^b q(x)v(x)u(x)dx\underset{\uparrow\text{ innan.}}{=}\langle Bu,v\rangle$$

Steg 3: (A pos. definit) $\langle Au,u\rangle=\int_a^b \underbrace{w(x)}_{>0}\underbrace{(u(x))^2}_{>}dx \underset{\uparrow\text{ om } u\neq 0}{>} 0$

Steg 4: (B pos. definit)

ToD MVE100 $\boxed{F16}$ (4)

$$\langle Bu,u\rangle = \int_a^b p(x)(u'(x))^2dx + \int_a^b q(x)(u(x))^2dx > 0$$

om inte $q(x)\equiv 0$ och $u(x)\equiv C\neq 0$. □

Kom ihåg: I de fallen vi löste X-ODE exakt räcker det att vi vet $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och $X_1, \ldots, X_n$ med säg $n=5, 10$ för att få en god approximativ lösning.

Ett allmänt Sturm-Liouville problem kan vara omöjligt (!?) att lösa. Istället fokuserar vi på att hitta (eller uppskatta) egenvärdena, $0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$

Rayleighs kvot: Betrakta $Bu=\lambda Au + (RV)$, och inför Rayleighs kvot

$$R(u)=\frac{\langle Bu,u\rangle}{\langle Au,u\rangle}$$

Man kan visa att det $\exists\ \tilde{u}\in V$ s.a.

$$R(\tilde{u}) = \min_{u\neq 0} R(u).$$

Låt nu $\varphi(t) = R(\tilde{u}+tu) = \dfrac{\langle B(\tilde{u}+tu),\tilde{u}+tu\rangle}{\langle A(\tilde{u}+tu),\tilde{u}+tu\rangle}$

$$= \frac{\langle B\tilde{u},\tilde{u}\rangle + 2t\langle B\tilde{u},u\rangle + t^2\langle Bu,u\rangle}{\langle A\tilde{u},\tilde{u}\rangle + 2t\langle A\tilde{u},u\rangle + t^2\langle Au,u\rangle}$$

s, a.

$$\varphi'(0) = \frac{\langle A\tilde{u},\tilde{u}\rangle 2\langle B\tilde{u},u\rangle - \langle B\tilde{u},\tilde{u}\rangle \cdot 2\langle A\tilde{u},u\rangle}{\langle A\tilde{u},\tilde{u}\rangle^2} = 0$$

ty $\varphi(t)$ minimeras av $t=0$

Då $\dfrac{\langle B\hat{u},\hat{u}\rangle}{\langle A\hat{u},\hat{u}\rangle} = R(\hat{u})$

$\Rightarrow \langle A\tilde{u},\tilde{u}\rangle 2\langle B\tilde{u},u\rangle - R(\hat{u})\langle A\hat{u},\hat{u}\rangle 2\langle A\hat{u},u\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle B\hat{u},u\rangle = \langle R(\hat{u})A\tilde{u},u\rangle$

Om detta gäller $\forall\ u \in V \overset{(!?)}{\Rightarrow} B\tilde{u} = R(\hat{u})A\tilde{u}$

Då är $R(\hat{u})$ ett egenvärde och $\tilde{u}$ motsvarande egenfunktion!!

Låt u_k, λ_k vara egenfkn/värde $\Rightarrow$

$$R(u_k) = \frac{\langle Bu_k,u_k\rangle}{\langle Au_k,u_k\rangle} = \lambda_k \frac{\langle Au_k,u_k\rangle}{\langle Au_k,u_k\rangle} = \lambda_k$$

Då $R(\hat{u})$ minimerar $R(u)$ måste därför $R(\hat{u}) = \lambda_1$ och $\tilde{u} = u_1$.

<u>Sats:</u> Det minsta egenvärdet $\lambda_1 = \min_{u \neq 0} R(u)$

Med mer jobb (DE p. 51^{53}) kan man även hitta λ_2, λ_3 etc

Ex: $\left.\begin{array}{l} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right\}$

Detta S-L-problem har lösningarna

$\lambda_n = n^2\pi^2$ och $u_n = \sin(n\pi x)$.

Här är $A = I$ och $B = -D^2$. Vi får

$$R(v) = \frac{\langle Bv, v\rangle}{\langle Av, v\rangle} = \frac{\langle -v'', v\rangle}{\langle v, v\rangle} \overset{\text{p.I.}}{=} \frac{\langle v', v'\rangle}{\langle v, v\rangle} \geq \lambda_1 = \pi^2.$$

Vi får att

$$\int_0^1 (v'(x))^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 (v(x))^2 dx$$

med likhet omm $v(x) = \sin(\pi x)$

Kom ihåg:

$$(*) \quad \begin{cases} -D[p(x)u'(x)] + q(x)u(x) = \lambda w(x)u(x) \\ a_1 u'(a) - a_2 u(a) = 0 \\ b_1 u'(b) + b_2 u(b) = 0 \end{cases}$$

med $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $w(x) > 0$.

Vård mål: Att kunna hitta goda approximationer till $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Vi har följande sats

<u>Sats (sid 54 DE):</u> Låt ~~Om~~ $p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x)$, $q_1(x) \leq q(x) \leq q_2(x)$ och $w_2(x) \leq w(x) \leq w_1(x)$, och låt $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots$ och $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots$ vara motsvarande egenvärdena till S-L-problemet (*) (dvs $\lambda_n^{(1)}$ motsv. p_1, q_1, w_1). Då har vi att

$$\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n \leq \lambda_n^{(2)} \quad \forall n.$$

Denna sats kan användas för att förenkla problemet (*) och ändå få hyfsade approximationer till λ_n.

Ex: Betrakta problemet

$$-D\left[\frac{4+x}{5}u'(x)\right] = \lambda(1+x-x^2)u \qquad 0<x<1$$

$$u(0)=u(1)=0$$

Här är $p(x)=\frac{4+x}{5}$, $q(x)\equiv 0$ och $w(x)=1+x-x^2$.

Vi observerar att $\frac{4}{5}\le\frac{4+x}{5}\le 1$ och att

$$1\le w(x)=1+x-x^2=\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4}.$$

Problem 1: $\quad -D\left[\frac{4}{5}u'(x)\right]=\lambda\frac{5}{4}u(x)$

dvs $\quad -u''(x)=\lambda\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2u(x)$

$$\Rightarrow \quad u(x)=C_1\cos\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\lambda}\,x\right)+C_2\sin\left(\tfrac{5}{4}\sqrt{\lambda}\,x\right)$$

$u(0)=C_1=0$

$u(1)=C_2\sin\left(\frac{5}{4}\sqrt{\lambda}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{4}\sqrt{\lambda}=n\pi$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n^{(1)}=\left(\frac{4n\pi}{5}\right)^2$$

Problem 2:

$$-D\left[1\cdot u'(x)\right]=\lambda\cdot 1\cdot u(x)$$

dvs $\quad -u''(x)=\lambda u(x)$

$$\Rightarrow \quad u(x)=C_3\cos(\sqrt{\lambda}\,x)+C_4\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$

$\Rightarrow \quad u(0)=C_3=0 \qquad u(1)=C_4\sin(\sqrt{\lambda})=0$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n^{(2)}=n^2\pi^2$$

Vi får att $6,317 \approx \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{(2)} \approx 9,87$

och $25,27 \approx \lambda_2^{(1)} \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^{(2)} \approx 39.48$

Approximationerna är "sådär" men inbegriper relativt lite jobb.

Med mer jobb får vi bättre resultat (som vi skall se).

Antag att $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ är egenvärden till ett egenvärdesproblem
$$\begin{aligned} Bu &= \lambda A u \\ u &\in V \end{aligned}$$

och att tillhörande egenfunktioner $\{u_i\}$ bildar ett fullständigt A-ortogonalt system för V.

Vårt mål är att hitta λ_1.

steg 1: Välj en godtycklig (men inte puckad) funktion $u_0 \in V$. Ofta är ett enkelt polynom som uppfyller randvillkoren lämpligt.

<u>Steg 2:</u> Lös $Bu_1 = A u_0$

OBS! Inget λ

Fortsätt att succesivt hitta $u_2, u_3, \dots$ mha ekvationen $Bu_k = Au_{k-1}$.

Steg 3: Då $\{\phi_k\}$ bildar ett fullständigt system i V finns $c_1, c_2, \dots$ s.a.

$$u_0 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + \dots$$

Då $Bu_1 = Au_0$ och $B\phi_k = \lambda_k A\phi_k$ så att $\frac{1}{\lambda_k}\phi_k = B^{-1}A\phi_k$ får vi

$$u_1 = B^{-1}Au_0 = B^{-1}A(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots)$$

$$= c_1\frac{1}{\lambda_1}\phi_1 + c_2\frac{1}{\lambda_2}\phi_2 + c_3\frac{1}{\lambda_3}\phi_3 + \dots$$

D.s.s.

$$u_2 = B^{-1}Au_1 = \frac{c_1}{(\lambda_1)^2}\phi_1 + \frac{c_2}{(\lambda_2)^2}\phi_2 + \frac{c_3}{(\lambda_3)^2}\phi_3 + \dots$$

$$\vdots$$

$$u_n = B^{-1}Au_{n-1} = \frac{c_1}{\lambda_1^n}\phi_1 + \frac{c_2}{\lambda_2^n}\phi_2 + \frac{c_3}{\lambda_3^n}\phi_3 + \dots$$

Så att

$$\lambda_1^n u_n = c_1\phi_1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n c_2\phi_2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^n c_3\phi_3 + \dots$$

Men då $\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^n \to 0 \quad n \to \infty$

Så (om vi inte råkade ta u_0 s.a. $c_1 = 0$) får vi att

$$u_n \hat{=} \frac{c_1}{\lambda_1^n} \phi_1 .$$

Vi har nu ~~gjort~~ vunnit två saker:

1) u_n är en god approximation till den första egenfunktionen (den klart viktigaste)

2) Då $u_{n+1} \hat{=} \frac{c_1}{\lambda_1^{n+1}} \phi_1$ följer att

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \hat{=} \frac{c_1 \phi_1 / \lambda_1^n}{c_1 \phi_1 / \lambda_1^{n+1}} = \lambda_1$$

Så vi vet också ett approximativt värde på λ_1.

Anm: Nackdelen är att varje iteration $Bu_k = Au_{k-1}$ kräver att vi löser en diff-ekvation.

Ex:
$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

"vi kan förstås lösa denna exakt"

Välj $u_0(x) = x^2 - 2x$ så får vi

$$-u_1'' = x^2 - 2x \Rightarrow u_1 = \frac{-x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

$u_1(0) = c_2 = 0 \quad u_1'(1) = -\frac{1}{3} + 1 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}$

så att
$$u_1(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x.$$

Man kan visa att
$$2.4 \leq \frac{u_0(x)}{u_1(x)} \leq 3 \qquad \forall\ x \in [0,1].$$

P.s.s. får vi
$$u_2(x) = \frac{x^6}{360} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{9} - \frac{4}{15}x$$

och
$$2.46 < \frac{u_1(x)}{u_2(x)} < 2.5 \qquad \forall\ x \in [0,1].$$

Exakt lösning: $u = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

och $u(0) = c_1 = 0$
$$u'(1) = c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.467. \quad \text{Ganska bra!}$$

TOD MVE100

F18 (1)

Kom ihåg: 1) $Bu = \lambda Au$

$u \in V$

$u_1 = B^{-1} A u_0, \ldots, \quad u_k = B^{-1} A u_{k-1}$

då är $\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \lambda_1$ och $u_n \approx \frac{c}{\lambda_1^n} \phi_1$

2)

$$R(v) = \frac{\langle Bv, v \rangle}{\langle Av, v \rangle} \quad \text{(Rayleigh-kvoten)}$$

och att $R(\phi_k) = \lambda_k$

Man kan kombinera de två:

Då u_n är nästan en egenvektor har vi att $R(u_n) \approx \lambda_1$. I själva verket är detta en mycket bättre approximation till λ_1.

Ex:

$$-u'' = \lambda u \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u'(1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.467401$$

Vi fick $u_0 = x^2 - 2x$, $u_1 = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x$

$$u_2 = \frac{x^6}{360} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{9} - \frac{4}{15}x.$$

Vidare är $R(u_n) = \dfrac{\int_0^1 -u_n''(x)\, u_n(x)\, dx}{\int_0^1 (u_n(x))^2 dx}$

Räkningar (Matlab!) ger

$R(u_0) = 2.5$

$R(u_1) \approx 2.4677$

$R(u_2) \approx 2,467405$ ← jävligt bra!

Observera att

B symmetrisk

$$\langle Au_k, u_k \rangle = \langle Bu_{k+1}, u_k \rangle = \langle u_{k+1}, Bu_k \rangle$$

$$= \langle u_{k+1}, Au_{k-1} \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ symm.}}}{=} \langle Au_{k+1}, u_{k-1} \rangle = \dots = \langle Au_{2k}, u_0 \rangle$$

p.s.s.

$$\langle Bu_k, u_k \rangle = \langle Au_{k-1}, u_k \rangle = \dots = \langle Au_{2k-1}, u_0 \rangle$$

Talet $\quad a_k = \langle Au_k, u_0 \rangle$

kallas för en Schwarz-konstant medan

$\mu_k = \dfrac{a_{k-1}}{a_k}$ kallas för Schwarz-kvot.

OBS: $\quad R(u_k) = \dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k}} = \mu_{2k}$

Vi har följande sats

Sats: a) $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots \geq \mu_k \geq \cdots \geq \lambda_1$

b) Låt m vara sådant att $\lambda_2 \geq m$.

Vi har då att felet $\mu_k - \lambda_1$ kan uppskattas som följer:

$$0 \leq \mu_k - \lambda_1 \leq \frac{\mu_k}{m-\mu_k}(\mu_{k-1} - \mu_k) \quad \forall\ \mu_k \leq m.$$

Anm: Vi använder b) på följande sätt: Hitta m, t.ex. i ett S-L-problem genom metod från förra gången eller genom "inspektion".

Ex:
$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{\langle Au_0, u_0\rangle}{\langle Au_1, u_0\rangle} \overset{A=I}{=} \frac{\int_0^1 u_0(x)^2 dx}{\int_0^1 u_1(x) u_0(x) dx} \approx 2.4706$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\langle Au_1, u_0\rangle}{\langle Au_2, u_0\rangle} \approx 2.4677$$

$$0 < \mu_2 - \lambda_1 \leq \frac{\mu_2}{m-\mu_2}(\mu_1 - \mu_2) \underset{m=22}{\approx} 0.0004$$