Veckans plan:

1) gå igenom "styckade fkner", stegfkn o impulsfkn.

2) Definiera Laplace-transformen och disk. denna

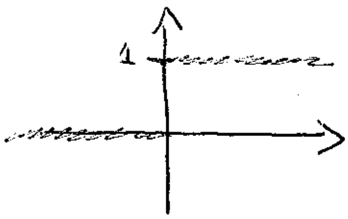
$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}\{\ \}} F(s)$$

"behöver skapa bibliotek av funktioner f(t) och deras transformer"

3) Lösa ODE med Laplace och undersöka lösningarna kvalitativt.

Def: Heavisides stegfkn $H(t)$:

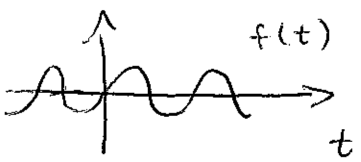
$$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

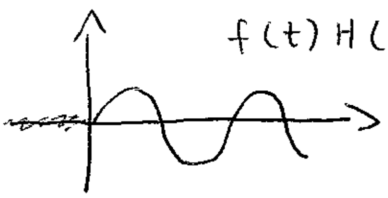


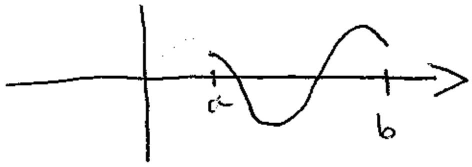
Används för att slå på och av fkner.

→ Ex1!

Ex2: $f(t) = \sin(t)$



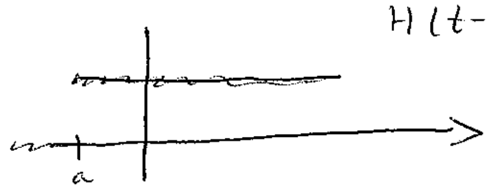




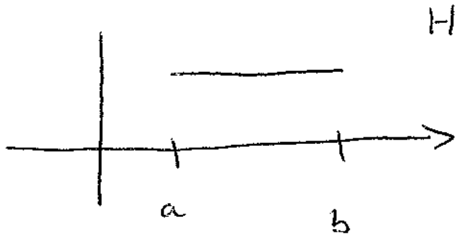
$$f(t)\left(H(t-a) - H(t-b)\right)$$

Ex 1:

$H(t-a)$

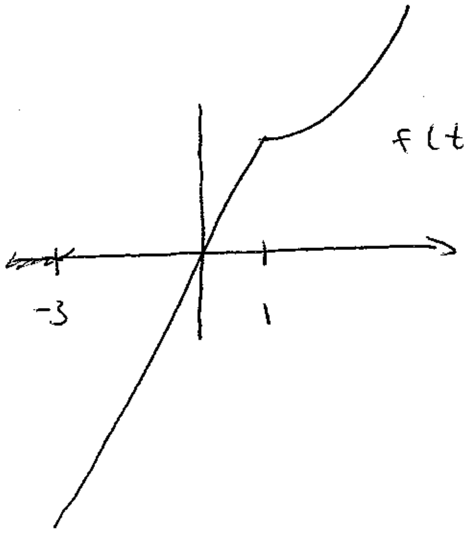


$H(t-a) - H(t-b)$



Ex 3:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -3 \\ 3t & -3 \leq t \leq 1 \\ 3e^{t-1} & 1 \leq t \end{cases}$$



alt:

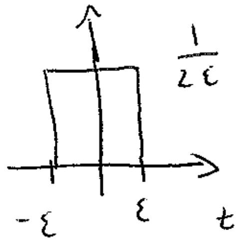
$$f(t) = \cancel{H(t-3)+3t(}$$

$$0 + 3t\,H(t+3) + (3e^{t-1} - 3t)\,H(t-1)$$

$$= 3t\,(H(t+3) - H(t-1)) + 3e^{t-1}\,H(t-1)$$

Impulsfkn / Dirac-δ:

Lät



$$f_\varepsilon(t) \text{ "}= \frac{1}{2\varepsilon}\left(H(t+\varepsilon) - H(t-\varepsilon)\right)$$

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dt = 1$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\,g(t)\,dt = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(t)\,dt \approx \frac{1}{2\varepsilon}\cdot g(0)\cdot 2\varepsilon = g(0)$$

g "snäll"

Låt $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$ (betyder vadå?)

Då är $\delta(t)$ en "fkn" med egenskapen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t)\,dt = g(0)$$

Vidare är

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) g(s+a)\,ds = g(a)$$

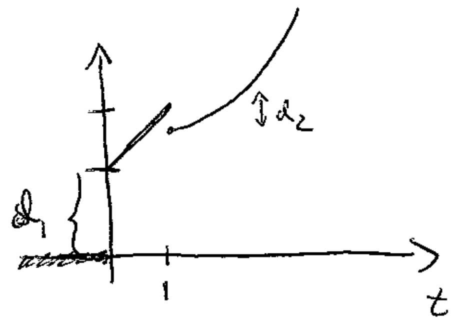
Dessutom är $\delta(t) = H'(t)$ i meningen att för $g(t)$ s.a. $g(t) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) H'(t)\,dt \overset{\text{P.I.}}{=} \Big[g(t) H(t) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) H(t)\,dt$$

$$= 0 - \int_{0}^{\infty} g'(t)\,dt = 0 - \Big[g(t) \Big]_{0}^{\infty} = g(0).$$

Betrakta funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 + t & 0 \le t < 1 \\ e^t & 1 \le t \end{cases}$$



Man får $f'(t) = g'(t) + d_1 \delta(t) + d_2 \delta(t-1)$

där

$$g'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < 1 \\ e^t & 1 \le t \end{cases}$$

Laplace transform

Def:

För en funktion $f(t)$ def. vi Laplace-transformen

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Vi skriver ofta $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Anm: 1) $f(t)$ för $t<0$ är irrelevant.

I tillämpningar är alltid $f(t)=0$ för $t<0$.

2) $F(s)$ är bara def. för de s s.a.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad \text{konvergerar}$$

Om $|f(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad \forall \; t \geq T$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad \text{konv. för } s \text{ s.a.}$$

$\mathrm{Re}(s) > \sigma$.

Tal: Låt $f(t) = e^{3t}$. Hitta $F(s)$

L: $$F(s) = \int_0^{\infty} e^{3t} e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(3-s)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3-s} e^{(3-s)t} \right]_0^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{s-3} & \text{om } \mathrm{Re}(s) > 3 \\ \text{odef.} & \text{annars.} \end{cases}$$

//

<u>Tal:</u> Om $f_1(t) = \delta(t)$, $f_2 = H(t-a)$ $a>0$ bestäm

$F_1(s)$, $F_2(s)$

<u>L:</u>

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = e^{-s\cdot 0} = 1 \quad (\text{OBS! } 0^-)$$

$$F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{om} \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Egenskaper för Laplacetransformen:

1) $\mathcal{L}$ är linjär: $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}$
$= \alpha\,\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\,\mathcal{L}\{g(t)\}$

2) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

3) $\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k F^{(k)}(s)$

4) $\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} F(s)$ för $a>0$

5) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$= s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$

<u>Anm:</u> Alla dessa egenskaper är mkt användbara för att lösa ODE

B: 1) Följer av att $\int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\alpha f(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st}\beta g(t)\,dt$$

2) $$\int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s-a)$$

3) $(k=1)$

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \mathcal{L}\{-tf(t)\}$$

4) $$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \left\{\begin{matrix} \tau = t-a \\ d\tau = dt \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(a+\tau)}\,d\tau = e^{-sa}F(s)$$

5) övning $\square$

Tal: Om $F(s) = \cancel{\dfrac{3s-11}{s^3-8s^2+29s-52}}$

$$F(s) = \frac{s^2-s+1}{s^3-8s^2+29s-52}, \quad \text{hitta } f(t).$$

L: Steg 1: Partialbråksuppdela

Vi får

$$\frac{s^2-s+1}{s^3-8s^2+29s-52}=\cdots=\frac{3}{(s-2)^2+9}+\frac{1}{s-4}$$

Tabell ger $\mathcal{L}\{e^{4t}\}=\frac{1}{s-4}$

och att

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)\}=\frac{3}{s^2+9}.$$

Egenskap 2) ger $\mathcal{L}\{e^{2t}\sin(3t)\}$

$$=\frac{3}{(s-2)^2+9}$$

Egenskap 1) ger

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\sin(3t)+e^{4t}\}=\frac{3}{(s-2)^2+9}+\frac{1}{s-4}$$

dvs $$f(t)=e^{2t}\sin(3t)+e^{4t} \qquad (t\geq 0)$$

Anm: MATLAB:

```
>> syms s
>> ilaplace((s^2-s+1)/(s^3-8s^2+29s-52))
ans= e^(2t) sin(3t) + e^(4t)
```

Laplace och ODE

Kom ihåg: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Tal: Lös $\begin{cases} \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = t \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

L: Vi Laplace-transformerar:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t)\} = s^2 X(s) - s\cancel{x(0)} - \dot{x}(0)$$

$$+ 3sX(s) - 3\cancel{x(0)} + 2X(s)$$

$$= X(s)(s^2+3s+2) - 1$$

$$\Rightarrow \quad X(s)(s^2+3s+2) = 1 + \frac{1}{s^2} = \frac{s^2+1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+3s+2)} = \dots = \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{5}{4(s-2)}$$

$$\overset{\text{tabell}}{\Rightarrow} \quad x(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t - 2e^{t} + \frac{5}{4}e^{2t} \qquad (\text{för } t \geq 0)$$

Anm: Vi skriver $\mathcal{L}^{-1}$ för inversen av Laplace transformen (dvs $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$).

Vi har
$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s)\, ds$$
men denna är opraktisk.

Låt nu $x(t) = (x_1(t) \cdots x_n(t))^T$

och betrakta $\dot{x} = Ax + u$ med $x(0) = x_0$

där $u = (u_1(t) \cdots u_n(t))^T$.

Laplace-transformera "rad för rad"

s.a.
$$s\,\underline{X}(s) - x_0 = A\,\underline{X}(s) + U(s)$$

$$\Rightarrow \quad (s\underline{I} - A)\underline{X}(s) = x_0 + U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{X}(s) = (s\underline{I} - A)^{-1}(x_0 + U(s))$$

Vi får då
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\underline{I} - A)^{-1}\}x_0 + \mathcal{L}^{-1}\{(s\underline{I} - A)^{-1}U(s)\}$$

Kom ihåg: $\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0$ hade den unika lösningen $x = e^{At}x_0$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}.$$

Detta ger oss ~~ett~~ ett annat sätt att beräkna e^{At}.

<u>Tal:</u> Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm e^{At}.

<u>L:</u> Vi har att

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & +1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(sI-A) = (s-1)^2$ och vi får

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{-1}{(s-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}((sI-A)^{-1}) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \quad \text{som förut!} \quad //$$

<u>Anm:</u> 1) En stor fördel med Laplacemetoden är att begynnelsevillkor kommer med automatiskt.

2) $(sI-A)^{-1}$ kallas ibland för resolventen till A.

3) Laplace kan också användas till att lösa integralekvationer.

Betrakta ekvationen

$$\dot{x}(t) + a x(t) + b \int_0^t x(\tau)\,d\tau = c \qquad (*)$$

"uppkommer när man räknar på kretsar t.ex."

Låt $y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$ s.a. $\dot{y}(t) = x(t)$, och $y(0)=0$.

Vi får

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s)$$

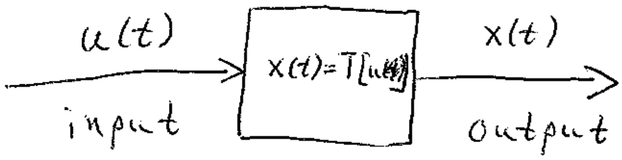
$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \qquad \left(\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\} = \frac{1}{s} X(s) \right)$$

Laplace-transformering av $(*)$ leder nu till

$$s\,X(s) + a\,X(s) + \frac{b}{s} X(s) = \frac{c}{s} \qquad (\text{om } x(0)=0)$$

ur vilket vi kan hitta $X(s)$ och därmed $x(t)$.

Linjära system (lite terminologi)



Ex: $\ddot{x} + ax = u(t)$, $x(0) = 0$ } Lösningen är en fkn $x(t)$ som beror på $u(t)$. Vi skriver $x(t) = T[u(t)]$

OBS: Om
$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_u + a x_u = u(t) \\ x_u(0) = 0 \end{array}\right\} \quad x_u = T[u]$$

och
$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_v + a x_v = v(t) \\ x_v(0) = 0 \end{array}\right\} \quad x_v = T[v]$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_u + \ddot{x}_v + a x_u + a x_v = u(t) + v(t)$$
$$x_u(0) + x_v(0) = 0$$

S.a. $x_u + x_v = T[u + v]$

Ett ~~linjärt~~ system T är ($x(t) = T[u(t)]$)

1) <u>Inverterbart</u> om olika indata ($u_1 \neq u_2$) alltid ger olika utdata ($x_1 \neq x_2$).

2) <u>Kausalt</u> om $x(t)$ enbart beror av $u(\tau)$ för $\tau \le t$.

3) <u>Linjärt</u> om $T[\alpha u + \beta v] = \alpha T[u] + \beta T[v]$

4) <u>Stabilt</u> om begränsad indata (dvs $|u(t)| \le M_1, \ \forall t$) ger begränsad utdata ($|x(t)| \le M_2 \ \forall t$)

5) Tidsinvariant om $u(t) \xrightarrow{T} x(t)$

$$\Rightarrow \quad u(t-t_0) \xrightarrow{T} x(t-t_0).$$

I vårt exempel "är systemet T en diff-ekv". Laplace-transformen gör följande:

$$\begin{tikzcd}
u(t) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & \boxed{T} \arrow[r] & x(t) \\
U(s) \arrow[r] & \boxed{\tilde{T}} \arrow[r] & X(s) \arrow[u, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Dvs T byts mot $\tilde{T}$ som enklare kan analyseras.

Överföringsfunktion, impulssvar och stabilitet

Betrakta
$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \cdots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_0 u$$

och dess $\mathcal{L}$-transf ($x(0) = \dot{x}(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0$)

$$(a_n s^n + \cdots + a_0)\,X(s) = (b_m s^m + \cdots + b_0)\,U(s).$$

Def: överföringsfkn $G(s)$ def. som

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

OBS: Om $u_1 \neq u_2$:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{U_1(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} = \frac{X_2(s)}{U_2(s)} = G_2(s)$$

Låt nu $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

Då blir $X(s) = G(s)U(s) = G(s)$.

Def: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ kallas för impulssvaret.

Anm: $g(t)$ är utdata om $\delta(t)$ är indata, dvs $g(t) = T[\delta]$

Stabilitet: Betrakta nu

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} = \frac{b_m (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

z_i = zeros

p_i = poles

Antag att p_1 är en enkel pol. Partial-bråksuppdelning ger

$$G(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \cdots\cdots$$

Invers $\mathcal{L}$ ger då (om $u(t) = \delta(t)$)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{c}{s-p_1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\cdots\}$$

$$= c\, e^{p_1 t} + \cdots\cdots$$

Om $\mathrm{Re}(p_1) > 0$ växer $|x(t)|$ exponentiellt!!

Vidare analys ger att även $\mathrm{Re}(p_1) = 0$ är problematiskt.

<u>Def:</u> Ett system med öv-fkn $G(s)$ är <u>stabilt</u> omm $\mathrm{Re}(p_k) < 0$ $k = 1, \ldots, n$.

<u>Faltning</u>

<u>Def:</u>

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = (f*g)(t)$$

Vi får då att

$$(u * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = u(t)$$

dvs $u * \delta = u$

Låt nu $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ vara impulssvaret.

Vi får att $x(t) = T[u(t)] = T[(u*\delta)(t)]$

$$= T\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right] = \left(\approx T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta)\,\delta(t-k\Delta)\,\Delta\right]\right.$$

$$\overset{\text{linjärt}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta)\,T[\delta(t-k\Delta)]\,\Delta \underset{\text{tids inv.}}{=} \left.\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta)\,g(t-k\Delta)\,\Delta\,\tau\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = (u*g)(t).$$

Om T är ett LTI (Linear Time-Invariant) system, kan utdata $x(t)$ fås genom att falta insignalen u med impulssvaret g.

Dvs

$$x(t) = (u*g)(t)$$

"Lös för $u=\delta$ och du kan ta fram allmän lösning"

Tal: Betrakta $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=u$

med $x(0)=\dot{x}(0)=0$

Hitta impulssvaret g och, den allmäna utryck lösningen x mha g.

L: Om $u=\delta$ får vi

$$s^2 X(s)+2s X(s)+5X(s)=1$$

$$\Rightarrow \quad X(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}=\frac{1}{(s+1)^2+4}=G(s)$$

$$\Rightarrow \quad g(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)H(t)$$

Vi får $x=u*g$ dvs

$$x(t)=(u*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}\sin(2(t-\tau))H(t-\tau)\,d\tau$$ //

Anm (överkurs): $G(t,\tau)=\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}\sin(2(t-\tau))H(t-\tau)$

är den s.k. Greens-funktionen till differentialoperatorn $D^2+2D+5I$.

Anm: Enligt ovan är

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{(u*g)(t)\}$$

och dessutom $X(s) = G(s)U(s)$

$$\Rightarrow \quad G(s)U(s) = \mathcal{L}\{(u*g)(t)\}.$$

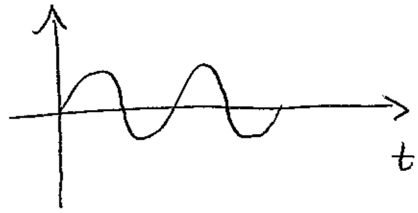
Allmänt är

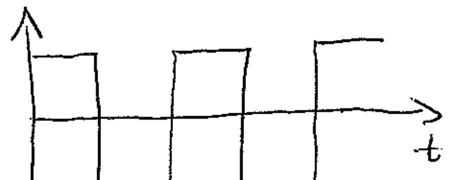
$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(s)F_2(s).$$

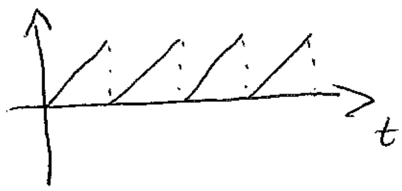
Lite om ~~frekvenssvar~~

Laplace-transform av periodiska fkn

I många tillämpningar är $u(t)$ en periodisk fkn:







Låt därför $u(t)$ $(t \geq 0)$ vara en periodisk fkn med period T, dvs

$$u(t) = u(t+nT) \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Det kan vara problematiskt att direkt beräkna $\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt$.

Men, vi har

$$\int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} u(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st} u(t)\,dt$$

$$+ \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} u(t)\,dt + \dots = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} u(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} u(\tau+nT)\,d\tau$$

$t \Rightarrow \tau + nT$

$$= \sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \underbrace{\int_0^T e^{-s\tau} u(\tau)\,d\tau}_{=I} = \int_0^T e^{-s\tau} u(\tau)\,d\tau \sum_{n=0}^\infty (e^{-sT})^n$$

u per,

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} u(\tau)\,d\tau.$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} u(\tau)\,d\tau}$$