ToD MVE100

Fourierserier

Kom ihåg! Om T LTI-system med impulssvar $g(t)$ $\Rightarrow$ $x(t) = \cancel{u(t)*}(u*g)(t)$

"$j = \sqrt{-1}$"

$$u \longrightarrow \boxed{T} \xrightarrow{x}$$

Vi får: $T[e^{j\omega t}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$

$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ö-fkn}}}{G(j\omega)} e^{j\omega t}$$

OBS: $e^{j\omega t}$ är en <u>egenfunktion</u> och $G(j\omega)$ är motsvarande <u>egenvärde</u>.

Om $v_1, \ldots, v_n$ är en egenbas för A $\Rightarrow$ alla $v \in \mathbb{R}^n$ kan uttryckas som en linj.-komb. av $v_1, \ldots, v_n$.

$$Av = A(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_n \lambda_n v_n.$$

Spelar $e^{j\omega_0 t}, e^{2j\omega_0 t}, \ldots, e^{kj\omega_0 t}$ samma roll?

Kan jag skriva $f(t) = \sum c_k e^{jk\omega_0 t}$?

När går det?

<u>Sats:</u> Låt $f(t)$ vara en begränsad fkn med period T. Antag att

1) $f(t)$ har ändligt # extrempunkter i en per. T

2) $f(t)$ har ändligt " diskont. — " —

Då $\exists \ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots$ så att

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

i alla kontinuitetspunkter t och

$$\frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

om t är en diskont.-punkt.

Här är $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

<u>Anm:</u> 1) Vi skriver ofta $f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

och summan kallas för (den komplexa) Fourier-serien av $f(t)$.

2) $$\int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t}\, dt = \int_0^T e^{j(k-l)\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T & k = l. \end{cases}$$

"a, a+T ok"

" $e^{jk\omega_0 t}$, $e^{jl\omega_0 t}$ ortogonala fkner!

Vi återkommer"

3) Observera likheten med Taylor-utv.

Hur (väljer) hittar vi c_k?

Om $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$ $\xRightarrow{\int \text{ mult } e^{-jlw_0 t}}$

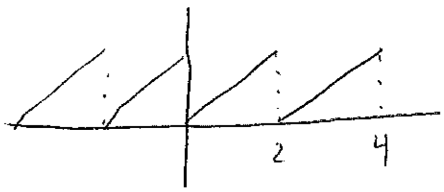
$$\int_0^T f(t) e^{-jlw_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^T e^{j(k-l)w_0 t} dt = c_l T$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c_l = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jlw_0 t} dt}$$

<u>Tal:</u> Låt

$$f(t) = t \quad \text{för} \quad 0 \le t \le 2$$

och med period 2.



Hitta F-serien för $f(t)$.

<u>L:</u> Enligt ovan är $f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$

där $c_k = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) e^{-jkw_0 t} dt \overset{w_0 = \pi}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-jk\pi t} dt$

$$\overset{k \neq 0}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{t}{-jk\pi} e^{-jk\pi t} \right]_0^2 + \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{jk\pi} e^{-jk\pi t} dt}_{=0} = \frac{j}{k\pi}$$

och $$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t\,dt = 1$$

$$\Rightarrow \quad f(t) \sim 1 + \sum_{k\neq 0} \frac{j}{k\pi} e^{jk\pi t} \quad //$$

---

f(t) reell

Kom ihåg: $z = u + iv \Rightarrow \bar{z} = u - iv$

om $z = e^{ix} \Rightarrow \bar{z} = e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

Om $f(t)$ är reell har vi att

$$c_{-k} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \overline{e^{-jk\omega_0 t}}\,dt$$

$$= \overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt} = \bar{c}_k .$$

Vi får:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{jk\omega_0 t} + \bar{c}_k e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{jk\omega_0 t} + \overline{c_k e^{jk\omega_0 t}}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[c_k e^{jk\omega_0 t}\right] = \{2c_k = a_k - jb_k\}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \quad //$$

övning

Tal 2: Hitta sin/cos-serien för $f(t)$ som i tal 1.

L: Vi har $2c_k = \frac{2j}{k\pi} = a_k - jb_k \Rightarrow a_k = 0$

och $b_k = -\frac{2}{k\pi}$ så $f(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k\pi} \sin(k\pi t)$ //

Vi har

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}[c_k] = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos(kw_0 t) + i\sin(kw_0 t)\right)dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(kw_0 t)\,dt$$

och p.s.s.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(kw_0 t)\,dt$$

Vi ~~kallar~~ får $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ s.a.

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kw_0 t) + b_k\sin(kw_0 t)$$

$f(t)$ jämn/udda

Om $f(t)$ jämn:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(kw_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{jmn}}\underbrace{\sin(kw_0 t)}_{\text{udda}}\,dt = 0$$

Vi får

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t)$$

Om $f(t)$ udda fås p.s.s.

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) //$$

<u>OBS:</u> Låt $f(t)$ vara som i talen.

$\Rightarrow$ $f(t)-1$ udda s.a.

$$f(t)-1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

<u>I</u> tillämpningar är $f(t)$ ofta def. på ngt intervall $[0,T]$.

Vi kan då utvidga $f(t)$:

$$\begin{cases} \phi(t) = f(t) & 0 < t < T \\ \phi(t+T) = \phi(t) & \forall\, t \end{cases}$$

$\phi(t)$ har period T.

<u>Ex:</u> Om $f(t) = t$ $0 \leq t < 2$ blir ϕ som i talen ovan.

Kom ihåg: Om $f(t)$ def på $[0,T]$ kan vi uttöka:

$$\phi(t) = f(t) \quad 0 \le t < T$$
$$\phi(t+T) = \phi(t) \quad \forall t.$$

I bland vill vi göra en jämn/udda utökning "bildspel".

Tal: Låt
$$\begin{cases} \phi(t) = |t|, & -2 \le t < 2 \\ \phi(t+4) = \phi(t) & \forall t \end{cases}$$

"jmn utökn av $f(t) = t \quad 0 \le t < 2$"

Bestäm den reella F-serien för ϕ.

L: ϕ är jämn $\Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k$.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-2}^{2} |t| \, dt = \int_0^2 t \, dt = 2$$

$$a_k = \frac{2}{4} \int_{-2}^{2} |t| \cos(k w_0 t) = \int_0^2 t \cos(k w_0 t) dt$$

$$= \dots = \frac{4}{k^2 \pi^2} \left((-1)^k - 1 \right) \qquad k \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \phi(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 \pi^2} \left((-1)^k - 1 \right) \cos\left(k \frac{\pi}{2} t\right)$$

"OBS $\frac{1}{2} a_0$"

"Visa bilder med approximationer."

konvergens av F-serier

Kom ihåg: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$; $z + \bar{z} = u + iv + u - iv = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$$|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{w} + \bar{z}w)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

$F_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t}$ approximerar $f(t)$.

Hur bra?

Låt $S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{c}_k e^{jk\omega_0 t}$ och

betrakta $\int_T |f(t) - S_N(t)|^2 dt$

$$\overset{\text{ovan}}{=} \int_T |f(t)|^2 dt + \int_T |S_N(t)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[\int_T f(t)\overline{S_N(t)}\,dt\right]$$

$$= \int_T |f(t)|^2 dt + \sum_{k=-N}^{N} T\,\tilde{c}_k \overline{\tilde{c}_k} - 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=-N}^{N} T\,\overline{\tilde{c}_k}\, c_k\right]$$

$\uparrow$

$$\int_T e^{j(k-\ell)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ T & k = \ell \end{cases}$$

$$= \int_T |f(t)|^2 dt - T\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 + T\sum_{k=-N}^{N} |c_k - \tilde{c}_k|^2$$

Observera:

1) $\int_T |f(t) - S_N(t)|^2 dt$ minimeras av $\tilde{c}_k = c_k$

dvs om $S_N(t) = F_N(t)$

Vi får

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t) - F_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

2) om $F_N(t) \to f(t)$ får vi

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{(Parseval's formel).}$$

Ex:

$$\begin{cases} f(t) = t & 0 \le t < 2 \\ f(t+2) = f(t) & \forall t \end{cases}$$

$$f(t) \sim 1 + \sum_{k\neq 0} \frac{j}{k\pi} e^{jk\pi t}$$

Parseval: $1 + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \pi^2 = 6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{(e) uppenbart)}$$

Anm: Med kännedom om f e c_k kan vi räkna ut felet, "visa bilder på felet".

" Gibbs fenomen, problem i sprången"

Derivering av Fourierserier, ODE

Man gör som man skulle tro, dvs deriverar term för term:

Om $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Anm: Språng i $f(t)$ är problematiskt, ~~vi kantar~~ ~~f(t)~~ deriverbar men kom ihåg vår generaliserade derivata.

Tal: Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ -1 & -\pi \le t < 0 \end{cases}$$

Skriv lösningen $x(t)$ till ekv.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t)$$ partikulärlösningen

på lämplig F-serie form.

L: Vi har att $f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}$ där $(\omega_0 = 1)$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-jkt}\,dt - \int_{-\pi}^{0} e^{-jkt}\,dt\right)$$

$$\overset{\text{övn.}}{=} \cdots = \begin{cases} 0 & k \text{ jämn} \\ \dfrac{2}{\pi j k} & k \text{ udda.} \end{cases}$$

Dvs

$$f(t) \sim \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2}{\pi j k} e^{jkt} \quad \left(= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi j (2k-1)} e^{j(2k-1)t} \right)$$

Ansätt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k e^{jkt} \Rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk \tilde{c}_k e^{jkt}$$

och

$$\ddot{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jk)^2 \tilde{c}_k e^{jkt}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + 2jk - k^2) \tilde{c}_k e^{jkt} = f = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2}{\pi j k} e^{jkt}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{c}_k = \begin{cases} 0 & k \text{ jämn} \\ \dfrac{2}{\pi j k (1 + 2jk - k^2)} & k \text{ udda.} \end{cases} //$$

Är lösningen

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2}{\pi j k (1 + 2jk - k^2)} e^{jkt}$$

användbar? Nja...

Men:

$$x_N(t) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{udda}}}^{N} \frac{2}{\pi j k (1 + 2jk - k^2)} e^{jkt}$$

kan vara det.

<u>Ortogonalitet</u> (i mån av tid)

Låt $L^2([0,T])$ vara alla (komplexa) fkn f def på $[0,T]$

s.a. $$\|f\|^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty.$$

$\|f\|$ = normen av f.

1) $L^2([0,T])$ är ett oändligtdimensionellt vektorrum, ty om $f, g \in L^2([0,T]) \Rightarrow$

$$\alpha f + \beta g \in L^2([0,T]).$$

2) Vi def. skalärprod. $\langle f, g\rangle = \int_0^T f g^* dt$.

3) Vi säger att f, g är <u>ortogonala</u> om

$\langle f, g\rangle = 0$.

4) $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ är ett <u>ortogonalt system</u>

på $L^2([0,T])$ ty $\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jl\omega_0 t}\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T & k = l \end{cases}$

5) Låt $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara ett ~~annat~~ godtyckligt ortogonalt system. För $f \in L^2([0,T])$ bildar vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(t) \quad \text{där} \quad c_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2}$$

Detta är en Fourierserie. &

6) $\{\phi_k\}$ är fullständigt om $\forall\ f \in L^2([0,T])$

gäller att $\left\| \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k - f \right\| \to 0$, då $N \to \infty$.

7) $\{e^{ik\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ är ett fullst. ortogonalsyst.

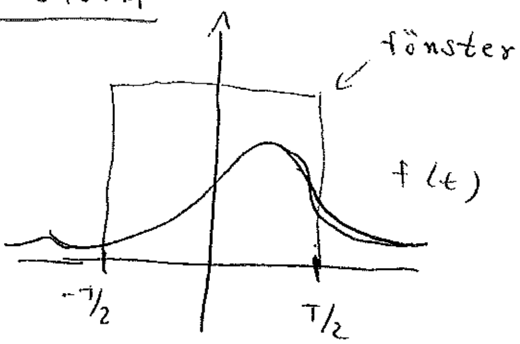
för $L^2([0,T])$, dvs en <u>bas</u> för

vektorrummet $L^2([0,T])$

8) $1, t, t^2, \ldots$ är också en bas men ej

ortogonala (Taylorutv.).

Fourierserie till Fouriertransform



Betrakta ngn fkn $f(t)$

och antag $f(t)$ icke-periodisk.

Låt
$$g_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq \frac{1}{2}T \\ f(t-nT) & \left(\frac{1}{2}(2n-1)T < |t| < \frac{1}{2}(2n+1)T\right). \end{cases}$$

Detta är den periodiska upprepningen av $f(t)$ i fönstret.

Vi har $g_T(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jnw_0 t}$ där
$$G_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt \qquad T = \frac{2\pi}{w_0}.$$

Vi får
$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jnw_0\tau}\, d\tau\right] e^{jnw_0 t}\, w_0$$

Detta är en Riemansumma! Låt nu $T \to \infty$ så att $w_0 \to 0$. Vi får
$$\lim_{T\to\infty} g_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-jw\tau}\, d\tau\, e^{jwt}\, dw \qquad (w = w_0)$$

och från bilden har vi $f(t) = \lim_{T\to\infty} g_T(t)$.

Dvs.
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{jwt} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-jw\tau}\, d\tau\, dw$$

Def: Fouriertransformen $F(j\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}$ def. som

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Inverstransformen $\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$ ges av

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Anm: 1) vissa skriver $F(\omega)$ istället för $F(j\omega)$.

2) $F(j\omega)$ $\exists$ om f är L^1 dvs $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ och har $<\infty$ # min/max och diskont. på alla ändliga intervall.

3) $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$ om t är en kont.-punkt, annars är $\frac{1}{2}(f(t^+)+f(t^-))=\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$.

Fouriertransformen har följande egenskaper.

1) $\mathcal{F}\{\dot{f}(t)\}=j\omega F(j\omega)$, $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}=(j\omega)^n F(j\omega)$

2) $\mathcal{F}\{\alpha f+\beta g\}=\alpha\mathcal{F}\{f\}+\beta\mathcal{F}\{g\}$

3) $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\}=e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$

4) $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\}=F(j(\omega-\omega_0))$

B: 3) $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$

$$=\{s=t-\tau\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega(s+\tau)}ds=e^{-j\omega\tau}\mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$=e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$$

Detta är en tids-shiftning. Om en insignal $f(t)$ fördröjs tiden τ blir $F(j\omega)$ mult. med $e^{-j\omega\tau}$. Vi säger att fasen ändras:

$$|e^{-j\omega\tau}F(j\omega)| = |F(j\omega)|\cdot 1 \qquad \text{(amplitud samma)}$$

men

$$\arg(e^{-j\omega\tau}F(j\omega)) = \arg(F(j\omega)) - \arg e^{j\omega\tau}$$

$$= \arg(F(j\omega)) - \omega\tau.$$

4)

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jt(\omega-\omega_0)}\,dt = F(j(\omega-\omega_0)).$$

Multiplikation med $e^{j\omega_0 t}$ shiftar transformen $F(j\omega)$ till $F(j(\omega-\omega_0))$

Kom ihåg: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

Här var $f(t)=0$ $t<0$.

För två sidiga fkner $f(t)$ används ibland

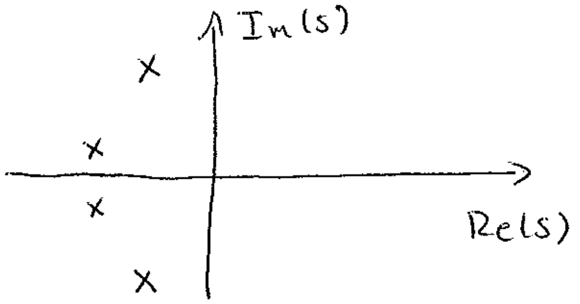
$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$F_B(s)$ är def. för de s s.a. $\int$ integralen konvergerar.

Låt $g(t)$ vara impulssvaret s.a.

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \quad \text{är över-fkn.}$$

Kom ihåg
$$G(s) = \frac{b_m (s-z_1) \cdots (s-z_m)}{a_n (s-p_1) \cdots (s-p_n)}$$



Om $Re(p_i) < 0 \quad i=1,\dots,n$

$\Rightarrow$ stabilt LTI-system.

x = pol

$$\cancel{G(s)} \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \quad \text{konv. om} \quad Re(s) \geq 0$$

detta gäller även $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt$.

Speciellt fungerar det för $s = jw$.

Om $g(t)$ är impulssvaret för ett <u>stabilt</u> LTI-system så $\exists$ dess Fouriertransform $G(jw)$.

Vad är vitsen med Fouriertransform (vs $\mathcal{L}$)?

Kom ihåg: $\cancel{\mathcal{F}\{e^{jw_0 t}\} = G(jw) e^{jwt}}$

"egenfkn, egenv." $\quad T[e^{jwt}] = G(jw) e^{jwt}$

Ex: Emil har en periodisk insignal

$u(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$ men är bara ute efter

~~sepa~~ frekvenserna $w_0, 2w_0, 3w_0$. Emil bygger

därför ett LTI-system vars ö-fkn $G(jw)$

är s.a. $|G(jw)|$ "stor" för $w_0, 2w_0, 3w_0$ och

annars liten. Han får

$$T[u(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(jkw_0) \cdot c_k \cdot e^{jkw_0 t} \approx \sum_{k=1}^{3} c_k G(jkw_0) e^{jkw_0 t}$$

så att T är ett lämpligt filter/förstärkare.

Anm: 1) $G(jw)$ kallas frekvens ö-fkn för systemet

2) plot$(w, |G(jw)|)$ och plot$(w, \arg(jw))$

kallas systemets frekvenssvar, och karakteriserar

systemet.