# Inlämningsuppgift 1

(inlämnas senast måndagen den 29 jan 2018 klockan 10:00)

**Läs noga igenom instruktionerna för hur inlämningarna skall redovisas innan du påbörjar arbetet med att lösa dem. Instruktionerna hittar ni på hemsidan.**

I nedanstående uppgifter skall du använda siffror $p_i$ vilket du hämtar från ditt personnummer enligt:

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6 - p_7p_8p_9p_{10} \qquad \text{(om } p_i = 0 \text{ så ersätts den med } p_i = 10\text{)}$$

**1** Låt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, där $a_{11} = p_7 - p_8, a_{12} = p_8, a_{21} = p_7 - p_8 + p_9, a_{22} = p_8 - p_9$.

**(a)** Beräkna $e^{tA}$ genom att skriva $A$ på formen $M\Lambda M^{-1}$, där $\Lambda$ är en diagonalmatris, och använda att $e^{tA} = Me^{\Lambda t}M^{-1}$ (se metod beskriven på den nedre delen av sid 61 i GJ).

**(b)** Beräkna $e^{tA}$ genom att bestämma $\alpha_0(t)$ och $\alpha_1(t)$ sådana att $e^{tA} = a_0(t)I + \alpha_1(t)A$ (se inrutad metod högst upp på sidan 61 i kursboken GJ).

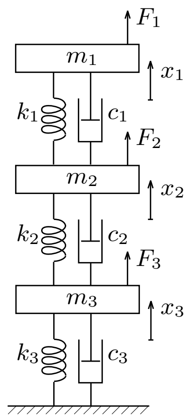
**(c)** Använd matrisen $e^{tA}$ för att bestämma de lösningar $x_1(t), x_2(t)$ till systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 \end{cases}$$

som är sådana att $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

**(d)** (**Överbetygsuppgift**) Lös systemet i deluppgift (c) genom att använda metoder från tidigare envariabelkurs (utan att blanda in egenvärden).

**2** Figuren till höger illustrerar ett dynamiskt system där tre kroppar (med massorna $m_1, m_2, m_3$) är kopplade till varandra och till omgivningen via fjädrar (med fjäderkonstanterna $k_1, k_2, k_3$) och viskösa dämpare (med dämparkonstanterna $c_1, c_2, c_3$), samt påverkas av yttre krafter ($F_1, F_2, F_3$). I nedanstående deluppgifter skall vi bestämma kropparnas rörelser i lite olika fall och med lite olika metoder.




**(a)** Ställ upp rörelseekvationerna för motsvarande odämpade homogena system ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$ och $F_1 = F_2 = F_3 = 0$) då $m_1 = p_1, m_2 = p_2, m_3 = p_3, k_1 = p_4, k_2 = p_5, k_3 = p_6$ och bestäm systemets egenvinkelfrekvenser och egensvängningar genom att med beräkningsprogram lösa motsvarande generaliserade egenvärdesproblem. Bestäm speciellt lösningarna till systemet då $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ x_1'(0) = 0,\ x_2'(0) = 0,\ x_3'(0) = 0$ och plotta deras grafer för $0 \le t \le 50$. Tolka graferna och försök se hur kropparnas rörelser påverkar varandra.

**(b)** Gör om det odämpade homogena systemet i deluppgift (a) till första ordningens system av differentialekvationer på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ och lös motsvarande egenvärdesproblem. Bestäm även nu lösningarna då $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_1'(0) = 0, x_2'(0) = 0, x_3'(0) = 0$ och plotta graferna för $0 \le t \le 50$. Jämför med resultatet i deluppgift (a). Vilket samband gäller mellan egenvärdena och egenvektorerna till systemet i deluppgift (a) och i denna deluppgift?

**(c)** Antag nu också att systemet är dämpat med dämparkonstanterna $c_1 = p_7/20, c_2 = p_8/20, c_3 = p_9/20$. Gör om det dämpade homogena systemet till första ordningens system av differentialekvationer på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ och lös motsvarande egenvärdesproblem. Bestäm även nu lösningarna då $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$, $x_3'(0) = 0$ och plotta graferna för $0 \leq t \leq 50$. Vad händer med lösningarna då $t \to \infty$?

**(d)** Skriv en funktionsfil i MATLAB för beräkning av $e^{tA}\mathbf{x}(0)$ på ett intervall $[0, t_1]$. Invariabler bör vara matrisen $A$, sluttidpunkten $t_1$, begynnelsevärdet $\mathbf{x}(0)$ samt antalet punkter $n$ i indelningen av $[0, t_1]$ (beräkning av av $e^A$ finns inbyggd i MATLAB, kommandot är `expm(A)`). Utvariabler bör vara en vektor $t$ av tidpunkter och en matris $X$, vars kolonner är $e^{tA}\mathbf{x}(0)$ för motsvarande $t$-värden. Använd sedan funktionsfilen för att lösa de odämpade och dämpade systemen i deluppgift (b) resp. (c), med samma begynnelsevärden som ovan. Plotta de tre kropparnas lägen och hastigheter och jämför med tidigare resultat.

**(e)** (**Överbetygsuppgift**) Antag, i det odämpade systemet i deluppgift (a), att massa $m_1$ drivs av en kraft av typen $F_1(t) = \cos(\omega t)\, H(t)$. Beräkna och plotta de tre massornas rörelser (för $t > 0$) i fallet då $\omega = \pi$, och då alla begynnelsevärden är 0 vid $t = 0$. Vad kommer hända med lösningarna om vi istället ändrar frekvensen så att $\omega$ överensstämmmer med en av systemets egenvinkelfrekvenser ? (du behöver inte beräkna lösningarna explicit i detta senare fall, men beskriv kort vad som fundamentalt särskiljer det mot det tidigare fallet)