Inlämningsuppgift 2

(inlämnas senast måndagen den 5 feb 2018)

Lösningarna till nedanstående uppgifter skall redovisas enligt samma instruktioner som beskrevs på inlämningsuppgift 1, och liksom tidigare hämtar du siffrorna p_i från ditt personnummer enligt:

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6 - p_7p_8p_9p_{10} \qquad \text{(om } p_i = 0 \text{ så ersätts den med } p_i = 10\text{)}$$

1 Betrakta funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{, då } t < 0 \\ b_6 t^2 & \text{, då } 0 \le t < 2 \\ 15e^{-b_7 t}, & \text{, då } 2 \le t < 5 \\ \sin(b_8 t), & \text{, då } t \ge 5 \end{cases}$$

där $b_i = 10/(10 + p_i)$.

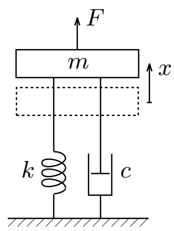
(a) Skriv $f(t)$ som ett enda uttryck med hjälp av språngfunktionen $H(t)$.

(b) Beräkna $f'(t)$, både för hand och med symbolhanterande beräkningsprogram, och jämför.

(c) Plotta eller skissa grafen till funktionen $f(t)$, för $0 \le t \le 20$.

(d) Beräkna Laplacetransformen av $f(t)$, både för hand och med symbolhanterande beräkningsprogram, och jämför.

2 Figuren till höger illustrerar ett enkelt dynamiskt system, där m är den svängande kroppens massa, k är fjäderkonstanten, c är dämpningskonstanten, och F är den drivande kraften. Kroppens avvikelse $x(t)$ från jämviktsläget beskrivs då av den endimensionella svängningsekvationen;



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

Betrakta systemet som ett kausalt linjärt tidsinvariant system (LTI-system) med F som insignal och lägeskoordinaten x som utsignal, och antag i nedanstående deluppgifter att $m = b_6, c = b_7, k = b_8$ där $b_i = 10/(10 + p_i)$.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion och impulssvar (för hand), samt undersök om systemet är stabilt.

(b) Använd symbolhanterande beräkningsprogram för att bestämma $x(t)$ då $F(t) = f(t)$, där $f(t)$ är funktionen från uppgift 1 ovan på följande två sätt: 1. Hitta Laplacetransformen $X(s)$ och inverstransformera denna för att ta fram $x(t)$. 2. Använd något kommando som är speciellt avsett för att lösa problem av denna typ (t.ex. `dsolve` i MATLAB eller DSolve i *Mathematica*). Plotta sedan $x(t)$ för $0 \le t \le 20$ för *båda* dina lösningar. Använd begynnelsevillkoren $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

(c) (**Överbetygsuppgift**) Använd Laplacetransform för att bestämma $x(t)$ då $F(t) = |\sin t|$, och plotta lösningen för $0 \le t \le 20$. Lösningen skall presenteras steg för steg men du får ta hjälp av beräkningsprogram för enskilda kalkyler. Kan `dsolve` i MATLAB och/eller DSolve i *Mathematica* användas för att bestämma $x(t)$ i detta fall ? Använd även här begynnelsevillkoren $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

3 Låt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, där $a_{11} = p_7 - p_8, a_{12} = p_8, a_{21} = p_7 - p_8 + p_9, a_{22} = p_8 - p_9$.

(a) Beräkna e^{tA} (för hand) med hjälp av Laplacetransform.

(b) Använd Laplacetransform för att för hand bestämma de lösningar $x_1(t), x_2(t)$ till systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

som är sådana att $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

4 (**Överbetygsuppgift**) Lös följande system av differentialekvationer, med tillhörande begynnelsevillkor, dels för hand och dels direkt med symbolhanterande programvara:

$$\begin{cases} 5x'' + y'' + 20x + 4y = \delta(t) \\ 4x'' + y'' + 16x + 5y = 0 \\ x(t) = y(t) = 0 \quad , \text{ då } t < 0 \end{cases}$$

(Tips: villkoret $x(t) = y(t) = 0$, då $t < 0$, blir uppfyllt om man föreskriver bygynnelsevillkoren $x(t_0) = x'(t_0) = y(t_0) = y'(t_0) = 0$ för något $t_0 < 0$, t.ex. $t_0 = -1$)