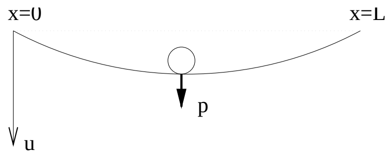
Inlämningsuppgift 4

(inlämnas senast onsdagen den 28 feb 2018)

Lösningarna till nedanstående uppgifter skall redovisas enligt samma instruktioner som beskrevs på inlämningsuppgift 1.

1 Figuren till höger illustrerar en lina som är inspänd i ändpunkterna. Linan belastas med en rörlig punktlast. Lasten börjar vid tiden $t = 0$ röra sig med konstant hastighet v m/s från $x = 0$ till $x = L$ där den stannar. Den kommer då att ge upphov till en nedböjning av linan.



Om vi bortser från gravitationens inverkan på linan (speciellt är linan vågrät i utgångsläget) och antar att spännkraften är så stor att den kan anses konstant så kommer nedböjningen $u(x,t)$ att satisfiera vågekvationen

$$u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = p\delta(x - vt)$$

med randvillkor $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Laplacetransformera med avseende på t för fixt x, $0 \le x \le L$. (Du behöver utnyttja att $\delta(x - vt) = \frac{1}{v}\delta(t - \frac{x}{v})$.) Du får då en ordinär differentialekvation för Laplacetransformen $U(x,s)$. Lös denna under förutsättning att $v \neq c$.

För att invertera Laplacetransformen kan man skriva

$$\frac{1}{\exp(sL/c) - \exp(-sL/c)} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(2k+1)sL/c).$$

Därefter kan u uttryckas som en oändlig serie, där vid varje tidpunkt endast ändligt många termer är skilda från 0. Sätt in lämpliga värden på L, c, v och p (i praktiken är v väsentligt mindre än c, men här kan det vara lämpligt att ta $2 < c/v < 5$) och rita strängformen $u(x,t)$ för ett antal lämpligt valda t-värden, så att man får en bild av vad som händer under och en liten stund efter lastens rörelse.

2 En balk är fast inspänd vid $x = 0$ och fri vid $x = L$. Balken kan vara belastad av en last $p(x,t)$. Ställ upp en differentialekvation med randvillkor för att bestämma balkens nedböjning $u(x,t)$. Om $p(x,t) = 0$ för $t > 0$ och balkens nedböjning och rörelse vid $t = 0$ är kända, så kan $u(x,t)$ bestämmas med Fouriers metod (se läroboken).

Antag först att balken belastas med en punktlast i mittpunkten. Sätt för enkelhets skull alla konstanter (balkens längd, lastens massa, materialkonstanter osv) till 1. Bestäm balkens form då stationärt tillstånd inträtt och balken är i vila.

Lasten tas bort vid tiden $t = 0$ och balken svänger sedan fritt. Uppskatta nedböjningen för $t > 0$ med Fouriers metod. Beräkna (med dator) några av de första Fourierkoefficienterna. Jämför i en figur den exakt beräknade nedböjningen med Fourierapproximationen vid tiden $t = 0$. Illustrera sedan balkens rörelse genom att plotta den uppskattade balkformen vid några lämpliga tidpunkter.

3 (**Överbetygsuppgift**) Antag att balken i uppgift 2 istället belastas av en punktlast $\sin(\Omega t)H(t)$ i mittpunkten. Bestäm balkens nedböjning $u(x,t)$, om $u(x,t) = 0$ för $t < 0$. Ledning: Gör en ansats där lastfunktionen och nedböjningen för fixt t utvecklats i balkens ortogonalsystem $X_k(x)$ (se boken). Bestäm sedan koefficientfunktionerna med hjälp av Laplacetransformering. Illustrera balkens rörelse.