Inlämningsuppgift 5

(inlämnas senast onsdag 7 mars 2018)

Lösningarna till nedanstående uppgifter skall redovisas enligt samma instruktioner som beskrevs på inlämningsuppgift 1, och liksom tidigare hämtar du siffrorna p_i från ditt personnummer enligt:

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6 - p_7p_8p_9p_{10} \qquad \text{(om } p_i = 0 \text{ så ersätts den med } p_i = 10)$$

1 I denna uppgift skall du arbeta med följande egenvärdesproblem av Sturm-Liouvilles typ:

$$\begin{cases} -y''(x) = \lambda(p_4 + p_5 x + p_6 x^2)y(x) \\ p_7 y'(0) - p_8 y(0) = 0 \\ p_9 y'(1) + p_{10} y(1) = 0 \end{cases}$$

(a) Bestäm med metoden i kompendiet sid. 54–55 dels ett intervall som innehåller det minsta egenvärdet, dels ett intervall som innehåller det näst minsta egenvärdet till egenvärdesproblemet ovan. Observera att formeln på sidan 55 inte kan tillämpas. Man måste ”lösa” en transcendent ekvation $f(x) = 0$. Det finns exempelvis ett Matlab-kommando ’fsolve’ och ett Mathematica-kommando ’FindRoot’ som kan användas. Egentligen är man inte så intresserad av någon större precision i lösningen, så det kan räcka med att man plottar $f(x)$ och läser av intervall som innehåller rötterna. Det är i så fall bäst att skriva ekvationen så att $f(x)$ inte har några singulariteter.

(b) Bestäm med hjälp av iteration och Schwarzkvoter det minsta egenvärdet till problemet ovan. Låt startvärdet $u_0(x)$ vara ett andragradspolynom som uppfyller randvillkoren. Utnyttja de intervall du bestämde i deluppgift 1 dels för att kontrollera rimligheten i det värde för $\lambda_{\min}$ som iterationsmetoden ger dig, dels för att uppskatta noggrannheten i detta värde med hjälp av Sats 5.7b i kompendiet. Iterationen skall avbrytas då relativa felet i egenvärdet är (enligt Sats 5.7b) högst 10^{-6}. Rita även upp några grafer till $u_{k-1}(x)/u_k(x)$, för att se hur de allt bättre approximerar λ.

2 (**Överbetygsuppgift**) Betrakta följande egenvärdesproblem;

$$\begin{cases} D^4 y = \lambda y \\ y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

Detta problem uppkommer för en böjsvängande stav med ”ledad lagring” av bägge ändarna, dvs. dessa hålls i fixa lägen men kan fritt ändra riktning.

(a) Visa att problemet är självadjungerat och totaldefinit.

(b) Bestäm alla egenvärden och egenfunktioner till problemet.

(c) Visa att

$$\int_0^1 (y''(x))^2\,dx \geq \pi^4 \int_0^1 y(x)^2\,dx \qquad (1)$$

för alla funktioner $y(x)$ som har kontinuerlig andraderivata och som är sådana att

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$$

För vilka sådana funktioner erhålls likhet i (1)?