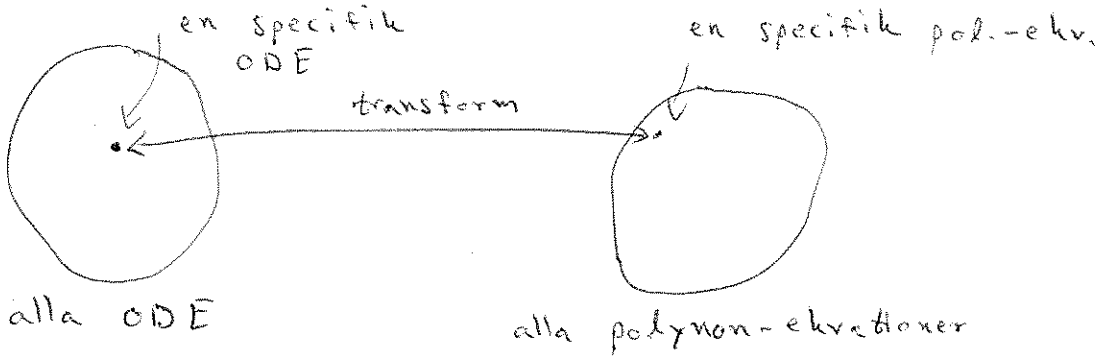
Kursens syfte:

Att lösa diff-ekv. med "moderna" metoder såsom linjär algebra och transformer.

Vad är en transform?



"Lösa pol.-ekv. <=> lösa ODE'n"

Vi kommer genomföra spektralanalys (frekvensanalys/egensvängningar) av lösningarna till diff-ekv.

Examination består av inlämningar / frivillig tenta.

Förkunskaper (repetera denna!)

i) linjär algebra, egenvärdesproblem, diagonalisering

ii) lösa ODE på "gammalt" sätt (integr. faktor etc)

iii) lite Taylorutveckling

Funktioner av matriser

Ex 1: Låt $f(x) = x^2 + 3x + 4$ och A en $n \times n$ matris.

Vi låter $f(A) = A^2 + 3A + 4I$ där I är $n \times n$ ident.-matris. Inga problem då A^2, A och I alla är väldef.

Ex 2: Om $f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k x^k$ låter vi

$$f_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k A^k \quad (\text{med } A^0 = I).$$

Vi vet vad $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ är men vad skall $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k A^k$ betyda? Vad är e^{tA}? Vad är $\sin(A)$?

Kom ihåg: $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$ Taylor-utv.

Def: e^{At} är en $n \times n$ matris (A är $n \times n$) där $[e^{At}]_{ij}$ (elementet på rad i, kolonn j) är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [A^k]_{ij} = [I]_{ij} + t[A]_{ij} + \frac{t^2}{2}[A^2]_{ij} + \cdots$$

Hur vet vi att detta ej är nonsens?

Sats: Gränsvärdet $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} [A^k]_{ij}$ existerar och därför är e^{tA} väldefinierat.

Kom ihåg: i) $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

ii) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \Rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k$

iii) $|A_{ij}| \leq \|A\|$

(kolla kap 2 EFH)

<u>B (sats):</u> $\sum_{k=0}^{N} \left| \frac{t^k}{k!} [A^k]_{ij} \right| \overset{iii)}{\leq} \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} \|A^k\| \overset{ii)}{\leq} \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} \|A\|^k$

$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A\|^k = e^{t\|A\|} < \infty$

Dvs $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [A^k]_{ij}$ är <u>absolut konvergent</u> $\square$

<u>Följdsats (mkt anvbar):</u> $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$

<u>"B":</u> $\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} A^k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{tA}$ $\square$

"Vad har det här med diff-ekv. att göra?"

Låt $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ vara fkn med

$\dot{x}_k(t) = \frac{d}{dt} x_k(t)$ (vi droppar nu (t) från not)

Antag att dessa uppfyller

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \text{ system av ODE}$$

Vi skriver $\dot{x} = Ax$ med $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ & $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

<u>Sats (3.1 EFH):</u> Betrakta $\dot{x} = Ax$ med $x(0) = x_0$.

Denna ekv. har den <u>unika</u> lösn. $x(t) = e^{tA}x_0$.

<u>B:</u> 1) Om $x(t) = e^{tA}x_0 \Rightarrow \dot{x}(t) = Ae^{tA}x_0$ och

$x(0) = e^{0A}x_0 = I x_0 = x_0$ så $x(t)$ är en lösning.

2) Låt $y(t)$ vara en annan lösning och sätt

$z(t) = x(t) - y(t)$. Vi får $\dot{z} = Az$ med $z(0) = 0$

och $\frac{d}{dt}\|z\|^2 = \frac{d}{dt} z^T \cdot z \underset{\text{kedjeregeln}}{=} \dot{z}^T \cdot z + z^T \cdot \dot{z}$

$= z^T A^T z + z^T \cdot A \cdot z = z^T (A^T + A) z \leq \|A^T + A\| \, \|z\|^2$

$\ulcorner$ Ty $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \lrcorner$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\|A^T + A\| t} \|z\|^2\right) = e^{-\|A^T + A\| t}\left(\frac{d}{dt}\|z\|^2 - \|A^T + A\| \, \|z\|^2\right) \leq 0$

$\Rightarrow e^{-\|A^T + A\| t} \|z\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|z\|^2 \leq 0 \Rightarrow z = 0.$ $\square$

integration

<u>Följd:</u> $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$

<u>B:</u> Fixera s och låt $X(t) = e^{tA}e^{sA}$; $Y(t) = e^{(t+s)A}$

$\Rightarrow \quad \dot{X}(t) = Ae^{tA}e^{sA} = AX(t)$ & $\dot{Y}(t) = Ae^{(t+s)A} = AY(t)$

och $X(0) = e^{sA} = Y(0)$. Entydighet ger $X(t) = Y(t)$. $\square$

Betrakta (*) $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$

Låt
$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = \dot{x}_{n-1}$$

(*) blir då $\cancel{a_n \dot{x}_n + \dots + a_1 x_1 + a_0 y = u(t)}$

$$a_n \dot{x}_n + a_{n-1} x_n + \dots + a_0 x_1 = u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + u(t)$$

Dvs
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t)$$

$$= Ax + bu(t)$$

Vi söker $y = x_1 = [1 \; 0 \; \cdots \; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c^T x$

Vi skriver. $\dot{x} = Ax + bu$

$y = c^T x$ (alt $y = c^T x + du$ mer generellt)

Fall 2: $\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u$

där $m \leq n-1$

Vi får $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + bu$

och $y = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_m \ 0 \cdots 0]^T x = c^T x$

<u>Övning:</u> Betrakta $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{u} + u$

Man får $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) visa att detta ger

$$\begin{cases} y = x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

b) visa att syst. i a) uppfyller

$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{u} + u$

<u>Fall 3:</u> Ännu mer generellt: $\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

där både y och u nu är vektorer

Om ihåg: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$

Hur skall e^{tA} beräknas?

Metod 1:

1) Låt $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\Rightarrow \quad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k D^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

2) A är <u>diagonaliserbar</u> om det $\exists$ matris M (inverterbar) och D (diagonal) s.a.

$$A = M D M^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^k = M D M^{-1} M D M^{-1} \cdots M D M^{-1} = M D^k M^{-1}.$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = M \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k \right) M^{-1} = M e^{tD} M^{-1}$$

[D innehåller egenvärdena för A och M's kolonner är de korresponderande egenvektorerna]

Kom ihåg: $\det(A-\lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$ kallas för den karakteristiska ekvationen för A. Lösningarna är dess egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Om v_k uppfyller $A v_k = \lambda_k v_k$ så är v_k en egenv. (korr. till λ_k)

Metod 2:

Sats (Cayley-Hamilton):

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I = 0$$

$n \times n$ - matris.

B: svårt □

Detta ger att

$$A^n = -c_{n-1}A^{n-1} \dots - c_0 I$$

$$\Rightarrow \quad A^{n+1} = A A^n = -c_{n-1}A^n - c_{n-2}A^{n-1} - \dots - c_0 A$$

$$= -c_{n-1}(-c_{n-1}A^{n-1} \dots - c_0 I) - \dots - c_0 A$$

så A^k $k \geq n$ kan skrivas som polynom i A av grad $n-1$.

Vi får $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k.$$

Hur hittar vi $\alpha_0(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$?

Liknande resonemang ger

$$e^{t\lambda_i} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\,\lambda_i^k \qquad i=1,\dots,n.$$

<u>Tal:</u> Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ hitta e^{tA}.

<u>L:</u> Vi har $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ så

$$e^{t\lambda_i} = \alpha_0(t) + \alpha_1 \lambda_i \Rightarrow \left.\begin{aligned} e^{3t} &= \alpha_0 + 3\alpha_1 \\ e^{-t} &= \alpha_0 - \alpha_1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2 \text{ okända} \\ &2 \text{ ekv.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha_0 &= \tfrac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t}) \\ \alpha_1 &= \tfrac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) \end{bmatrix} //$$

Om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ har vi bara ekvationen

$$e^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda$$

Men, en andra ekvation fås av att derivera m.a.p. λ:

$$t e^{\lambda t} = \alpha_1(t).$$

Kom i håg: $\dot{x} = Ax$ löses av $x = e^{tA}x_0$.

$x(0) = x_0$

Vi kan även lösa

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u & (*) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Förra gången visade vi att

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} \overset{s=-t}{\Rightarrow} e^{tA}e^{-tA} = e^{0A} = I$$

så att $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$.

Multiplicera $(*)$ med e^{-tA} s.a.

$$\underbrace{e^{-tA}(\dot{x} - Ax)}_{= \frac{d}{dt}(e^{-tA}x)} = e^{-tA}u$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-sA}x(s))\,ds = e^{-tA}x - e^{-0A}x(0)$$

$$= e^{-tA}x - x_0 = \int_0^t e^{-sA}u(s)\,ds$$

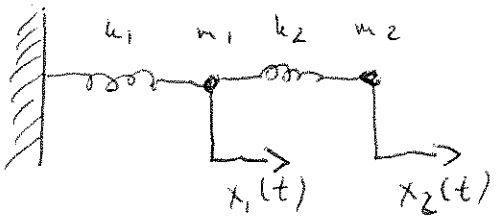
Multiplicera med e^{tA} så får vi:

$$x = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}u(s)\,ds$$

$$\left[\int_0^t \begin{bmatrix} e^{3s} \\ e^{-s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{e^{3s}}{3} \\ -e^{-s} \end{bmatrix}_0^t = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \\ -e^{-t} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right]$$

kap 4 (EFH):

Ex:



krafter m_1: $-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

krafter m_2: $-k_2(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

dvs

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alt

$$M \ddot{x} + K x = 0.$$

Hur löser vi detta?

Metod 1: skriv om som första ordningens system med 4 ekv o 4 obekanta.

Metod 2: Idé:

Ekvationen

$$\ddot{y} + D y = 0$$

där D diagonalmatris kan vi "enkelt"

lösa. Ty om $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = 0, \dots, \ddot{y}_n + \lambda_n y_n = 0$$

dvs ett frikopplat system! Kan vi gå från $A\ddot{x} + Bx = 0$ till $\ddot{y} + Dy = 0$?

<u>Ansatz:</u> <u>Steg 1:</u> Testa koordinatbytet

$$x = Py \quad \text{på} \quad A\ddot{x} + Bx = 0$$

$$\Rightarrow \quad AP\ddot{y} + BPy = 0$$

mult. $(AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + P^{-1}A^{-1}BPy = 0$$

Vi behöver att i) A är inverterbar

ii) Det $\exists$ P inverterbar s.a.

$$P^{-1}A^{-1}BP = D \leftarrow \text{diagonalmatris}$$

$$\Leftrightarrow \quad BP = APD \quad (*)$$

<u>Steg 2:</u> Låt $P = (v_1\ v_2 \cdots v_n)$

$$\Rightarrow \quad BP = B(v_1\ v_2 \cdots v_n) = (Bv_1\ Bv_2 \cdots Bv_n)$$

och

$$APD = A(v_1\ v_2 \cdots v_n)D$$

$$= (Av_1 \cdots Av_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 Av_1\ \lambda_2 Av_2 \cdots \lambda_n Av_n)$$

dvs (*) blir

$$B v_k = \lambda_k A v_k \qquad k = 1, \dots, n$$

Detta är ett <u>generaliserat</u> egenvärdesproblem.

Kom ihåg! Vi skrev om

(**) $A\ddot{x} + Bx = 0$ till

$\ddot{y} + Dy = 0$

där $x = Py$ och $BP = APD$

$\Leftrightarrow$ $Bv_k = \lambda_k A v_k$ $k = 1, \dots, n$ (+)

$P = (v_1 \cdots v_n)$

<u>Slutsats:</u> Om vi kan lösa egenv.-problemet (+) kan vi lösa (**).

Hur? "Antag vi har alla λ_k, v_k från (2)"

<u>steg 1:</u> Lös $\ddot{y}_k + \lambda_k y_k = 0$ $\forall k$

<u>steg 2:</u> ~~Låt~~ Utnyttja $x = Py = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underbrace{y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n}_{\text{"lösningen"}}$

<u>Anm:</u> 1) $y_1, \dots, y_n$ kallas för moder eller egensvängningar.

2) Om $\lambda_k > 0$ $\forall k$ $\Rightarrow$ $y_k = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ där $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$. Dessa kallas för <u>egenvinkelfrekvenserna</u>.

3) Om $x_0 = \alpha v_k$ ngt v_k

$\Rightarrow$ rörelsen bestäms av mod k

Hur löser vi ⊛?

<u>Sats:</u> λ uppfyller $Bv = \lambda A v$ (för ngt $v \neq 0$)

omm $\det(B - \lambda A) = 0$.

<u>B:</u> $Bv = \lambda A v \overset{\text{för ngn } v \neq 0}{\iff} (B - \lambda A) v = 0$ för ngn $v \neq 0$

$\iff \det(B - \lambda A) = 0$.

linj. alg.

Ekvationen $\det(B - \lambda A)$ är alltid av ordning n och har därför n (komplexa) rötter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ekvationen $B v_k = \lambda_k A v_k$ ger oss sedan v_k.

Kom ihåg: $D = P^{-1} A^{-1} B P$ vilket kräver A inverterbar och P inverterbar.

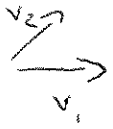
[När är $P = (v_1\ v_2 \cdots v_n)$ inv-bar?

Jo omm $v_1, v_2, \dots, v_n$ är <u>linjärt oberoende</u> dvs att

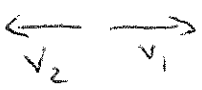
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

Ex: 

bas för $\mathbb{R}^2$



ej bas för $\mathbb{R}^2$

Sats: Om $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är distinkta egenvärden så är motsvarande egenv. $v_1, v_2, \dots, v_n$ linjärt oberoende.

B: sid 17 EFH, bevis som i linj. algebra med $A = I$. $\square$

Kap 4.6 i EFH går igenom fler villkor för existens av bas bestående av egenvektorer.

Låt oss avsluta med några tal.

Tal: Lös $A\ddot{x} + Bx = 0$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1: Vår plan är att "diagonalisera" problemet. Dvs hitta P s.a. om $x = Py$ så får vi systemet $\ddot{y} + Dy = 0$.

<u>Steg 1:</u> Betrakta $Bv = \lambda A v$ och lös

$\det(B - \lambda A) = 0$

$$0 = \det(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 6-2\lambda \\ 6-2\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)^2 - (6-2\lambda)^2$$

$$= 9 + \lambda^2 + 6\lambda - 36 - 4\lambda^2 + 24\lambda = -3\lambda^2 + 30\lambda - 27$$

har lösningarna $\underline{\lambda_1 = 1}$, $\underline{\lambda_2 = 9}$

<u>Steg 2:</u> Hitta v_1, v_2:

$$(B - \lambda_1 A) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \overset{+}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{4}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(B - \lambda_2 A) = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alt: Anv. Matlab $[P, D] = \mathrm{eig}(B, A)$

Obs syntaxen ~~et~~ $\mathrm{eig}(A, B)$!! ger $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 9$

$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

<u>Steg 3:</u> Lös $\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$$

$$\ddot{y}_2 + 9y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = a_2 \cos(3t) + b_2 \sin(3t)$$

<u>steg 4:</u> $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x = Py = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) - y_2(0) \\ y_1(0) + y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \dot{x}(0) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - 3b_2 \\ b_1 + 3b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = 2, \; b_2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = y_1 - y_2 = 2\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(3t)$$

$$x_2(t) = y_1 + y_2 = 2\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) \quad //$$

<u>Tal:</u> Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm e^{tA}.

<u>Lösning:</u>

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 = \lambda$$

Vi använder att $e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$

och att i) $e^{t\lambda} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$

ii) $te^{t\lambda} = \alpha_1$

$\Rightarrow \alpha_1 = te^t$ och $\alpha_0 = e^t - te^t$

Vi får att

$$e^{tA} = (e^t - te^t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^t\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} //$$

<u>Anm:</u> Om funktionen f har en "snäll" serie-utveckling

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$$

kan vi def. $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k A^k \underset{\substack{\uparrow \\ C=H.}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^k$

<u>EX:</u> $f(x) = \cos(x)$ etc.

<u>Tal:</u>