

Allmän relativitetsteori och Einsteins ekvationer

Håkan Andréasson, Göteborgs Universitet

April 26, 2013

Speciell relativitetsteori 1905

Låt S och S' vara två observatörer som rör sig med hastigheten v i förhållande till varandra längs x -axeln. Låt (t, x) and (t', x') vara koordinatsystemen som dessa observatörer använder.

Speciell relativitetsteori 1905

Låt S och S' vara två observatörer som rör sig med hastigheten v i förhållande till varandra längs x -axeln. Låt (t, x) and (t', x') vara koordinatsystemen som dessa observatörer använder.

Före år 1905 var det "ingen" som tvivlade på att relationen mellan dessa koordinater är:

$$t' = t, \quad x' = x - vt.$$

Speciell relativitetsteori 1905

Låt S och S' vara två observatörer som rör sig med hastigheten v i förhållande till varandra längs x -axeln. Låt (t, x) and (t', x') vara koordinatsystemen som dessa observatörer använder.

Före år 1905 var det "ingen" som tvivlade på att relationen mellan dessa koordinater är:

$$t' = t, \quad x' = x - vt.$$

Einstein insåg att denna relation inte är sann!

Speciell relativitetsteori 1905

Låt S och S' vara två observatörer som rör sig med hastigheten v i förhållande till varandra längs x -axeln. Låt (t, x) and (t', x') vara koordinatsystemen som dessa observatörer använder.

Före år 1905 var det "ingen" som tvivlade på att relationen mellan dessa koordinater är:

$$t' = t, \quad x' = x - vt.$$

Einstein insåg att denna relation inte är sann! 1905 publicerade han sitt arbete om den [speciella relativitetsteorin](#) där han ger följande relation:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(x - vt).$$

Här är c ljusets hastighet och $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Speciell relativitetsteori

Denna teori förenar rum och tid: Rum och Tid \rightarrow Rumtid

Speciell relativitetsteori

Denna teori förenar rum och tid: Rum och Tid \rightarrow Rumtid

Hermann Minkowski 1908:

"Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality."

Speciell relativitetsteori

Denna teori förenar rum och tid: Rum och Tid \rightarrow Rumtid

Hermann Minkowski 1908:

"Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality."

I speciell relativitetsteori är rumtiden plan (dvs. icke-krökt) och kallas Minkowskirumtiden och *metriken* har formen

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Denna teori förenar rum och tid: Rum och Tid → Rumtid

Hermann Minkowski 1908:

"Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality."

I speciell relativitetsteori är rumtiden plan (dvs. icke-krökt) och kallas Minkowskirumtiden och *metriken* har formen

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Vi kan också skriva detta på ett mer komplicerat vis

$$ds^2 = (-1)c^2 dt^2 + (1)dx^2 + (1)dy^2 + (1)dz^2 \quad [+ (0)dtdx + \dots + (0)dydz]$$

Metriken g_{ab}

En metrik i 4 dimensioner (tiden samt tre rumsdimensioner) beskrivs alltså i allmänhet av 10 komponenter som brukar betecknas g_{ab} , där $a, b = 0, 1, 2, 3$,

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Här gäller att $g_{ab} = g_{ba}$.

En metrik i 4 dimensioner (tiden samt tre rumsdimensioner) beskrivs alltså i allmänhet av 10 komponenter som brukar betecknas g_{ab} , där $a, b = 0, 1, 2, 3$,

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Här gäller att $g_{ab} = g_{ba}$.

Minkowskimetriken har alltså formen

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Konsekvenser av den speciella relativitetsteorin

- Tidsutvidgning (tvillingparadoxen)
- Längdkontraktion
- $E = Mc^2$

Konsekvenser av den speciella relativitetsteorin

- Tidsutvidgning (tvillingparadoxen)
- Längdkontraktion
- $E = Mc^2$

Dessa konsekvenser har verifierats experimentellt!

Newtons klassiska teori för gravitation kan inte enkelt modifieras till att uppfylla den speciella relativitetsteorin.

Allmän relativitetsteori

Newtons klassiska teori för gravitation kan inte enkelt modifieras till att uppfylla den speciella relativitetsteorin.

I November 1915 gav Einstein ett föredrag där han presenterade sin teori för gravitation, den [allmänna relativitetsteorin](#):

Newtons klassiska teori för gravitation kan inte enkelt modifieras till att uppfylla den speciella relativitetsteorin.

I November 1915 gav Einstein ett föredrag där han presenterade sin teori för gravitation, den **allmänna relativitetsteorin**:

- Rumtiden är en fyrdimensionell mångfald ("yta") M med en "Lorentzmetrik" g_{ab} , $a, b = 0, 1, 2, 3$.

Newtons klassiska teori för gravitation kan inte enkelt modifieras till att uppfylla den speciella relativitetsteorin.

I November 1915 gav Einstein ett föredrag där han presenterade sin teori för gravitation, den **allmänna relativitetsteorin**:

- Rumtiden är en fyrdimensionell mångfald ("yta") M med en "Lorentzmetrik" g_{ab} , $a, b = 0, 1, 2, 3$.
- Metriken g_{ab} bestäms genom Einsteins ekvationer (med $c = G = 1$)

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

Vänsterledet i Einsteins ekvationer

Einsteins ekvationer skrivna på formen $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ *ser enkla ut.*

Vänsterledet i Einsteins ekvationer

Einsteins ekvationer skrivna på formen $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ *ser enkla ut*.

Låt oss först betrakta vänsterledet ("*made of marble*")

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R.$$

Här är $R_{ab} = R^d{}_{adb}$, and $R = R^a{}_a$,

Vänsterledet i Einsteins ekvationer

Einsteins ekvationer skrivna på formen $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ *ser enkla ut*.

Låt oss först betrakta vänsterledet ("*made of marble*")

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R.$$

Här är $R_{ab} = R^d{}_{adb}$, and $R = R^a{}_a$, och

$$R^d{}_{abc} = \frac{\partial}{\partial x^b} \Gamma^d{}_{ac} - \frac{\partial}{\partial x^a} \Gamma^d{}_{bc} + \Gamma^e{}_{ac} \Gamma^d{}_{be} - \Gamma^e{}_{bc} \Gamma^d{}_{ae},$$

Vänsterledet i Einsteins ekvationer

Einsteins ekvationer skrivna på formen $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ *ser enkla ut*.

Låt oss först betrakta vänsterledet ("*made of marble*")

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R.$$

Här är $R_{ab} = R^d{}_{adb}$, and $R = R^a{}_a$, och

$$R^d{}_{abc} = \frac{\partial}{\partial x^b}\Gamma^d{}_{ac} - \frac{\partial}{\partial x^a}\Gamma^d{}_{bc} + \Gamma^e{}_{ac}\Gamma^d{}_{be} - \Gamma^e{}_{bc}\Gamma^d{}_{ae},$$

där

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d}\right).$$

Vänsterledet i Einsteins ekvationer

Einsteins ekvationer skrivna på formen $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ *ser enkla ut*.

Låt oss först betrakta vänsterledet ("*made of marble*")

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R.$$

Här är $R_{ab} = R_{adb}$, and $R = R^a_a$, och

$$R^d_{abc} = \frac{\partial}{\partial x^b} \Gamma^d_{ac} - \frac{\partial}{\partial x^a} \Gamma^d_{bc} + \Gamma^e_{ac} \Gamma^d_{be} - \Gamma^e_{bc} \Gamma^d_{ae},$$

där

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right).$$

Låt oss se på ett par exempel!

Högerledet i Einsteins ekvationer

Högerledet ("*made of wood*") utgörs av energi-momentum tensorn T_{ab} för materian.

Högerledet i Einsteins ekvationer

Högerledet ("*made of wood*") utgörs av energi-momentum tensorn T_{ab} för materian. Vi måste göra ett val av materiamodell.

Högerledet i Einsteins ekvationer

Högerledet ("*made of wood*") utgörs av energi-momentum tensor T_{ab} för materian. Vi måste göra ett val av materiamodell.

Exempel på materiamodeller:

- fluidmodeller ("vätskor")
- kinetiska materiamodeller ("gaser")
- elastiska materiamodeller ("gummi")
- fältteoretiska modeller ("kvantfält")

Högerledet i Einsteins ekvationer

Högerledet ("*made of wood*") utgörs av energi-momentum tensor T_{ab} för materian. Vi måste göra ett val av materiamodell.

Exempel på materiamodeller:

- fluidmodeller ("vätskor")
- kinetiska materiamodeller ("gaser")
- elastiska materiamodeller ("gummi")
- fältteoretiska modeller ("kvantfält")

Vissa modeller används av astrofysiker...

Högerledet i Einsteins ekvationer

Högerledet ("*made of wood*") utgörs av energi-momentum tensorn T_{ab} för materian. Vi måste göra ett val av materiamodell.

Exempel på materiamodeller:

- fluidmodeller ("vätskor")
- kinetiska materiamodeller ("gaser")
- elastiska materiamodeller ("gummi")
- fältteoretiska modeller ("kvantfält")

Vissa modeller används av astrofysiker...

Förutom ekvationerna $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$, kan ekvationer för materiamodellen tillkomma.

Högerledet i Einsteins ekvationer

Högerledet ("*made of wood*") utgörs av energi-momentum tensorn T_{ab} för materian. Vi måste göra ett val av materiamodell.

Exempel på materiamodeller:

- fluidmodeller ("vätskor")
- kinetiska materiamodeller ("gaser")
- elastiska materiamodeller ("gummi")
- fältteoretiska modeller ("kvantfält")

Vissa modeller används av astrofysiker...

Förutom ekvationerna $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$, kan ekvationer för materiamodellen tillkomma.

De slutliga ekvationerna utgörs av ett **icke-linjärt system av partiella differentialekvationer**.

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927,

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927, **bekräftat av** Hubble 1929,

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927, **bekräftat av** Hubble 1929, **expansionen accelererar, Nobelpris 2011**)

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927, **bekräftat av** Hubble 1929, **expansionen accelererar, Nobelpris 2011**)
- Penrose-Hawkings singularitets satser (1965-1973)

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927, **bekräftat av** Hubble 1929, **expansionen accelererar, Nobelpris 2011**)
- Penrose-Hawkings singularitets satser (1965-1973)
- Numeriskt genombrott 2005 av Franz Pretorius

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927, **bekräftat av** Hubble 1929, **expansionen accelererar, Nobelpris 2011**)
- Penrose-Hawkings singularitets satser (1965-1973)
- Numeriskt genombrott 2005 av Franz Pretorius
- Bildandet av svarta hål endast genom kollaps av gravitationella vågor, Christodoulou 2008 (Shawpriset tillsammans med Hamilton 2011)

Höjdpunkter i allmän relativitetsteori

- Gravitationell rödförskjutning (gravitationell tidsutvidgning)
- Ljuset böjer av
- Merkurius perihelionprecession
- Förutsäger existens av svarta hål (Schwarzschild 1916 men...)
- Förutsäger big bang (Friedmann 1922, Lemaitre 1927 men...)
- Förutsäger att universum expanderar (Friedmann 1922, Lemaitre 1927, **bekräftat av** Hubble 1929, **expansionen accelererar, Nobelpris 2011**)
- Penrose-Hawkings singularitets satser (1965-1973)
- Numeriskt genombrott 2005 av Franz Pretorius
- Bildandet av svarta hål endast genom kollaps av gravitationella vågor, Christodoulou 2008 (Shawpriset tillsammans med Hamilton 2011)

Allmän relativitetsteori är nödvändig för att GPS ska fungera!

Kip Thorne, "Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy"