MVE255/TMV191 Matematisk analys i flera variabler M/TD

FEM1: Randvärdesproblem och finita elementmetoden i en variabel.

[1]

Inledning

Vi ska lösa *partiella differentialekvationer* (PDE), dvs ekvationer som innehåller partiella derivator av den okända flervariabelfunktionen $u = u(x, y, z)$. Till exempel, Laplaces ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

och Poissons ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Jämför *ordinär differentialekvation* (ODE) från läsperiod 2 som innehåller ordinära derivator av en okänd envariabelfunktion, till exempel,

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

En PDE ställs upp i ett område i rummet, $D \subset \mathbf{R}^3$, eller i planet, $D \subset \mathbf{R}^2$. För att lösningen ska vara unik behöver vi ge *randvillkor* på randen $S = \partial D$ till området D, till exempel,

$$u = 0 \quad \text{på } S.$$

Vi har då ett *randvärdesproblem.*

Man kan också studera tidsberoende PDE, till exempel, värmeledningsekvationen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

och vågekvationen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

PDE uppträder inom många områden: värmeledning, diffusion, hållfasthet, vågutbredning, strömning, elektromagnetiska fält, kvantmekanik och så vidare. Trots olika bakgrund har dessa PDE väsentligen samma matematiska form. Observera, till exempel, att Laplace-operatorn

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ingår i samtliga exempel ovan.

Vi löser PDE numeriskt med *finita elementmetoden* (FEM). Denna metod är ett mycket viktigt verktyg för maskiningenjören. Metoden utvecklades på 1950-talet av maskiningenjörer för hållfasthetsberäkningar. FEM bygger på en omskrivning av randvärdesproblemet till en så kallad *svag formulering.*

För enkelhets skull börjar vi med att studera randvärdesproblem och FEM i en variabel, dvs $u = u(x)$, $x \in I \subset \mathbf{R}$.

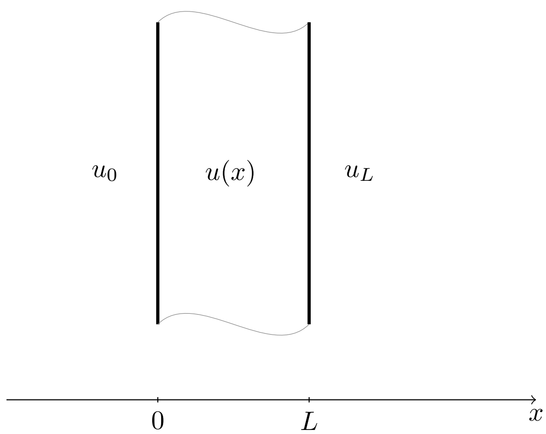
Vi anger SI-enheter inom klammer, till exempel, `[K]` för temperatur i Kelvin, `[m]` för längd i meter, `[J]` för energi i Joule.

[1] 2 maj 2011, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola

1.1 Randvärdesproblem i en variabel

1.1.1 Värmeledningsekvationen

Temperaturen $u(x)$ $[\mathtt{K}]$ vid tvärsnittet x $[\mathtt{m}]$ i en platta med tjockleken L $[\mathtt{m}]$, se Figur 1, ges av differentialekvationen



Figur 1: Värmeledning i en platta.

$$\mathrm{D}\big(-a(x)\,\mathrm{D}u(x)\big) = f(x), \quad x \in I = (0, L). \tag{1}$$

Här är

- $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ $\left[\dfrac{\mathtt{1}}{\mathtt{m}}\right]$ derivata;
- $f(x)$ $\left[\dfrac{\mathtt{J}}{\mathtt{m}^3\,\mathtt{s}}\right]$ värmekälltäthet;
- $u(x)$ $[\mathtt{K}]$ temperatur;
- $a(x)$ $\left[\dfrac{\mathtt{J}}{\mathtt{m}\,\mathtt{K}\,\mathtt{s}}\right]$ värmeledningskoefficient;
- $j(x) = -a(x)\,\mathrm{D}u(x)$ $\left[\dfrac{\mathtt{J}}{\mathtt{m}^2\,\mathtt{s}}\right]$ värmeflödestäthet i x-riktningen (Fouriers lag).

Vi antar här att inga kvantiteter beror av koordinaterna y och z. Samma ekvation kan också beskriva värmeledning i en smal stång av längden L.

Dimensionskontroll: Kontrollera att enheterna i vänster- och högerled stämmer i differentialekvationen i (1).

1.1.2 Randvillkor

Vid $x = L$ gäller att värmeflödestätheten i *utåtriktningen* är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$j(L) = k_L\big(u(L) - u_L\big), \tag{2}$$

där

- u_L [K] är den omgivande temperaturen;
- $u(L)$ [K] är temperaturen på insidan av ytan;
- k_L $\left[\dfrac{\mathtt{J}}{\mathtt{m^2\,K\,s}}\right]$ en värmeöverföringskoefficient.

Å andra sidan är ju flödestätheten enligt Fouriers lag:

$$j(L) = -a(L)\,\mathrm{D}u(L).$$

Alltså:

$$-a(L)\,\mathrm{D}u(L) = k_L\big(u(L) - u_L\big),$$

dvs

$$a\,\mathrm{D}u + k_L\big(u - u_L\big) = 0 \quad \text{för } x = L.$$

Vid $x = 0$ är värmeflödestätheten i *utåtriktningen*

$$-j(0) = k_0\big(u(0) - u_0\big), \tag{3}$$

eftersom $-j(0)$ är flödestätheten i $-x$-riktningen (utåt). Men vi har även $j(0) = -a(0)\,\mathrm{D}u(0)$. Alltå:

$$-a(0)\,\mathrm{D}u(0) = k_0\big(u(0) - u_0\big).$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva:

$$a\,\mathrm{D_N}u + k\big(u - u_\mathrm{A}\big) = 0 \quad \text{för } x = 0, L. \tag{4}$$

Här är u_A den omgivande temperaturen (*ambient temperature*), dvs $u_\mathrm{A} = u_0$ respektive $u_\mathrm{A} = u_L$, koefficienten $k = k_0$ respektive $k = k_L$, och $\mathrm{D_N}$ riktningsderivatan i utåtriktningen (i den utåtriktade normalens riktning), dvs

$$\mathrm{D_N} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \text{ i } x = 0, \quad \mathrm{D_N} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \text{ i } x = L.$$

Koefficienten k anger hur väl isolerad ändpunkten är.

Specialfall 1: $k = \infty$, ingen isolering. Om vi dividerar med k,

$$\frac{1}{k}a\,\mathrm{D_N}u + u - u_\mathrm{A} = 0,$$

och låter $k \to \infty$ får vi $0 + u - u_\mathrm{A} = 0$, dvs

$$u = u_\mathrm{A} \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

Detta randvillkor innebär att den aktuella ändpunkten, $x = 0$ eller $x = L$, inte är isolerad. Temperaturen är densamma på insidan och på utsidan av randytan.

Specialfall 2: $k = 0$, perfekt isolering. Med $k = 0$ får vi

$$a\,\mathrm{D_N}u = 0,$$

dvs inget värmeflöde genom den aktuella ändpunkten. Eftersom $a > 0$ kan detta förenklas till

$$\mathrm{D_N}u = 0 \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

1.1.3 Randvärdesproblem

Genom att sätta samman (1) och (4) får vi ett randvärdesproblem.

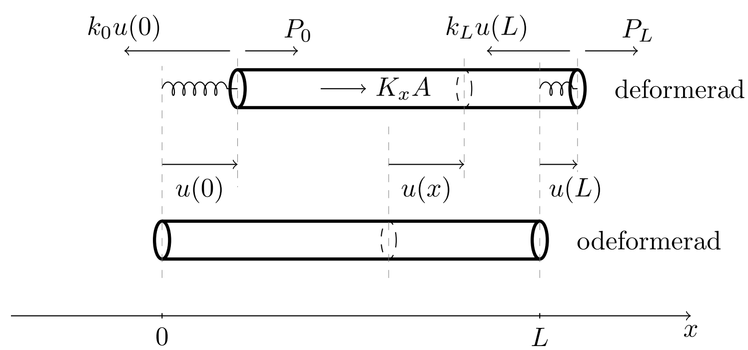
Randvärdesproblem. Finn $u = u(x)$ sådan att

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{D}\big(a\,\mathrm{D}u\big) &= f \qquad && \text{för } x \in I = (0, L),\\
a\,\mathrm{D}_{\mathrm{N}}u + k\big(u - u_{\mathrm{A}}\big) &= g && \text{för } x = 0, L.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Här har vi lagt till ett föreskrivet *inflöde* av värme med flödestätheten g, där $g = g_0$ respektive $g = g_L$. Detta görs genom att lägga till termerna $-g_L$ respektive $-g_0$ i (2) och (3).

Observera strukturen hos ekvationerna. Även mekanikens ekvationer har denna form. Till exempel:

Stångens ekvation. För en axiellt belastad stång med fjädrande upphängning i ändpunkterna har vi följande randvärdesproblem:



Figur 2: Axiellt belastad stång.

$$
\begin{cases}
-\mathrm{D}\big(EA\,\mathrm{D}u\big) = K_xA & \text{för } x \in I = (0, L),\\
EA\,\mathrm{D}_{\mathrm{N}}u + ku = P & \text{för } x = 0, L.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Här är

- u $[\mathtt{m}]$ axiell förskjutning i x-riktningen;
- E $\left[\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}^2}\right]$ Youngs modul, A $[\mathtt{m}^2]$ tvärsnittsarea, EA $[\mathtt{N}]$ styvhet;
- K_x $\left[\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}^3}\right]$ lasttäthet, K_xA $\left[\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}}\right]$ last i x-riktningen;
- $P = P_0$ eller $P = P_L$ $[\mathtt{N}]$ kraft i x-riktningen;
- k $\left[\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}}\right]$ fjäderkonstant;
- $\mathcal{N} = EA\,\mathrm{D}u$ $[\mathtt{N}]$ utåtriktad snittkraft.

Randvillkoren kommer från kraftbalans i ändpunkterna:

$$
-\mathcal{N}(0) = P_0 - k_0u(0), \quad \mathcal{N}(L) = P_L - k_Lu(L).
$$

Specialfall 1: $k = \infty$, fast inspänd ände. Då $k \to \infty$ får vi $u = 0$. Det betyder oändligt styv fjädring, dvs stången är fast inspänd i den aktuella ändpunkten $x = 0$ respektive $x = L$.

Specialfall 2: $k = 0$, fri ände. Med $k = 0$ blir randvillkoret $EA\,\mathrm{D_N}u = P$. Det betyder ingen fjäderkraft, dvs den aktuella ändpunkten är fri.

Konstitutiva lagar. Ekvationen $\mathcal{N} = EA\,\mathrm{D}u$ är Hookes lag. Den spelar samma roll som Fouriers lag $j = -a\,\mathrm{D}u$ i värmeledning. Dessa är exempel på konstitutiva lagar som beskriver materialets egenskaper.

Observera analogin mellan värmeledning och mekanik. Till exempel:

$$\begin{aligned} a &\longleftrightarrow EA \\ j &\longleftrightarrow \mathcal{N} \\ g &\longleftrightarrow P \\ f &\longleftrightarrow K_x A \end{aligned}$$

Exempel 1.1. Vi studerar en stång med konstant styvhet som är fast inspänd i högra änden och fri i vänstra änden. Den belastas endast med en kraft i vänstra änden. Randvärdesproblemet blir

$$\begin{cases} -\mathrm{D}\big(EA\,\mathrm{D}u\big) = 0 \quad \text{för } x \in I = (0, L), \\ -EA\,\mathrm{D}u(0) = P_0, \;\; u(L) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Eftersom EA är konstant blir differentialekvationen $u''(x) = 0$ med allmän lösning $u(x) = Cx + D$ (integrera två gånger). Randvillkoren ger

$$P_0 = -EA\,u'(0) = -EAC, \quad 0 = u(L) = CL + D,$$

med lösning $C = -P_0/EA$, $D = -CL$. Alltså:

$$u(x) = \frac{P_0}{EA}(L - x).$$

Vi ser att om $P_0 > 0$ (tryckkraft) så blir $u(x) > 0$, dvs stången trycks ihop (förskjutningen är positiv, rörelse åt höger). Om $P_0 < 0$ (dragkraft) så blir $u(x) < 0$, dvs stången förlängs.

1.2 Svag formulering

Vi skriver nu om randvärdesproblemet (5) till en så kallad svag form. Vi multiplicerar differentialekvationen

$$-\mathrm{D}\big(a\,\mathrm{D}u\big) = f$$

med en funktion v och integrerar partiellt över $I = (0, L)$:

$$\begin{aligned} \int_0^L fv\,\mathrm{d}x &= -\int_0^L \mathrm{D}\big(a\,\mathrm{D}u\big)v\,\mathrm{d}x \\ &= -\Big[a\,\mathrm{D}u\,v\Big]_0^L + \int_0^L a\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x \\ &= a(0)\,\mathrm{D}u(0)\,v(0) - a(L)\,\mathrm{D}u(L)\,v(L) + \int_0^L a\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nu använder vi även randvillkoren från (5):

$$\begin{aligned} a(0)\,\mathrm{D}u(0) &= k_0\big(u(0) - u_0\big) - g_0, \\ -a(L)\,\mathrm{D}u(L) &= k_L\big(u(L) - u_L\big) - g_L. \end{aligned}$$

Vi får

$$\int_0^L f v \,\mathrm{d}x = \Big(k_0\big(u(0)-u_0\big)-g_0\Big)v(0) + \Big(k_L\big(u(L)-u_L\big)-g_L\Big)v(L) + \int_0^L a\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x.$$

Vi samlar termer med den obekanta funktionen u i vänsterledet:

$$\begin{aligned}&\int_0^L a\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x + k_0u(0)v(0) + k_Lu(L)v(L)\\ &\qquad\qquad = \int_0^L f v\,\mathrm{d}x + \big(k_0u_0+g_0\big)v(0) + \big(k_Lu_L+g_L\big)v(L).\end{aligned}$$

Denna ekvation ska vara uppfylld för alla val av funktionen v. Den godtyckliga funktionen v kallas *testfunktion*. Denna ekvivalenta formulering av randvärdesproblemet kallas *den svaga formuleringen*. Den är grunden för finita elementmetoden.

Den svaga formuleringen. Finn en funktion $u = u(x)$ sådan att ekvationen

(8)
$$\begin{aligned}&\int_0^L a\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x + k_0u(0)v(0) + k_Lu(L)v(L)\\ &\qquad = \int_0^L f v\,\mathrm{d}x + \big(k_0u_0+g_0\big)v(0) + \big(k_Lu_L+g_L\big)v(L)\end{aligned}$$

är uppfylld för alla testfunktioner v.

(För att formuleringen ska vara helt korrekt måste man även ange vilka funktionsklasser u och v ska tillhöra. Vi gör inte det.)

Randvillkoret $u = u_{\mathrm{A}}$ ($k = \infty$) är lite speciellt. Då måste man välja testfunktionerna med $v = 0$ i den ändpunkt där randvillkoret $u = u_{\mathrm{A}}$ gäller. Då blir motsvarande term $v(0) = 0$ och/eller $v(L) = 0$ i (8). Vi illustrerar detta i två exempel.

Exempel 1.2. Vi skriver ned den svaga formuleringen av Exempel 1.1. Där har vi randvillkoren $-EA\,\mathrm{D}u(0) = P_0$, $u(L) = 0$. Vi ska alltså använda testfunktioner med $v(L) = 0$. Dessutom har vi $k_0 = 0$ och ingen kraft, $K_xA = 0$, vilket motsvarar $f = 0$ i (8). Den svaga formuleringen av (7) blir: Finn en funktion $u = u(x)$ med $u(L) = 0$ och sådan att ekvationen

$$\int_0^L EA\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x = P_0v(0)$$

är uppfylld för alla testfunktioner v med $v(L) = 0$.

Vi kontrollerar att lösningen $u(x) = \frac{P_0}{EA}(L-x)$ uppfyller den svaga ekvationen. Vi har $EA\,\mathrm{D}u = -P_0$ så att

$$\int_0^L EA\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x = -P_0\int_0^L \mathrm{D}v\,\mathrm{d}x = -P_0\big(v(L)-v(0)\big) = P_0v(0)$$

för alla v med $v(L) = 0$.

Exempel 1.3.

$$\begin{cases} -\mathrm{D}\big((1+x^2)\,\mathrm{D}u\big) = 1 \quad \text{i } (-1,1),\\ u(-1) = 0, \quad \mathrm{D}u(1) = 0.\end{cases}$$

(a) Skriv ned den svaga formuleringen.
(b) Lös problemet genom att integrera två gånger.

Lösning. (a) Randvillkoret $u(-1) = 0$ kräver att vi använder testfunktionen v sådan att $v(-1) = 0$. Vi multiplicerar med v och integrerar:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} v\,\mathrm{d}x &= -\int_{-1}^{1} \mathrm{D}\big((1+x^2)\,\mathrm{D}u\big)\,v\,\mathrm{d}x \quad \Big\{\text{partiell integration}\Big\}\\
&= \Big[(1+x^2)\,\mathrm{D}u(x)\,v(x)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (1+x^2)\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x\\
&= -2\,\underbrace{\mathrm{D}u(1)}_{=0}\,v(1) + 2\,\mathrm{D}u(-1)\,\underbrace{v(-1)}_{=0} + \int_{-1}^{1} (1+x^2)\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1} (1+x^2)\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Den svaga formuleringen är: Finn $u = u(x)$ sådan att $u(-1) = 0$ och

$$\int_{-1}^{1} (1+x^2)\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} v\,\mathrm{d}x \quad \text{för alla } v \text{ med } v(-1) = 0.$$

(b) Differentialekvationen är

$$\mathrm{D}\big((1+x^2)\,\mathrm{D}u\big) = -1$$

Vi integrerar:

$$\begin{aligned}
(1+x^2)\,\mathrm{D}u &= -x + C,\\
\mathrm{D}u(x) &= -\frac{x}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2},\\
u(x) &= -\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\arctan(x) + D.
\end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{aligned}
0 &= u(-1) = -\tfrac{1}{2}\ln(2) + C\arctan(-1) + D = -\tfrac{1}{2}\ln(2) - C\frac{\pi}{4} + D,\\
0 &= \mathrm{D}u(1) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}C.
\end{aligned}$$

Vi får $C = 1$, $D = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}$. Lösningen är

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}\\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}\right) + \arctan(x) + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

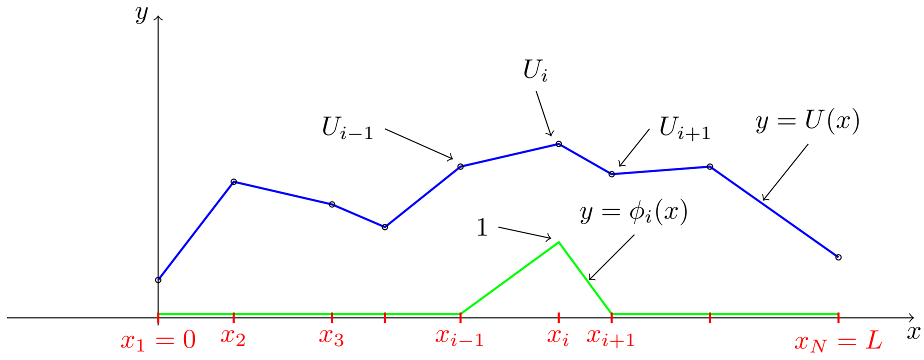
Du bör lära dig att bestämma den svaga formuleringen för randvärdesproblem med olika kombinationer av randvillkor samt att lösa *enkla* randvärdesproblem genom att integrera två gånger, se övningarna i slutet av detta häfte. Men det viktigaste är att kunna lösa *allmänna* randvärdesproblem med finita elementmetoden.

1.3 Finita elementmetoden i 1–D

(Finita elementmetoden kallas ”finite element method” på engelska, uttalas ”fajnajt”. Nedan anger vi inom parentes vad vissa viktiga begrepp heter på engelska.)

Vi ska beräkna en approximativ lösning $U(x)$, som är en *styckvis linjär funktion*. Vi inför ett beräkningsnät (*mesh*) i intervallet $I = (0, L)$:

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_N = L.$$



Figur 3: En styckvis linjär funktion $y = U(x)$ och en basfunktion $y = \phi_i(x)$.

Obs: vi använder "MATLAB-numrering" som börjar med 1. Vi har alltså N punkter (kallas även noder) x_i och $N-1$ intervall $I_i = (x_i, x_{i+1})$ av längd $h_i = x_{i+1} - x_i$. Se Figur 3.

En kontinuerlig styckvis linjär funktion $U(x)$ är entydigt bestämd av sina nodvärden $U_i = U(x_i)$. För att beskriva $U(x)$ inför vi *basfunktionerna* $\phi_i(x)$, en för varje nod x_i. Funktionerna $\phi_i(x)$ bestäms av att de är kontinuerliga, styckvis linjära, samt att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Se Figur 3. Funktionen $U(x)$ kan nu skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i(x), \quad \text{med koefficienterna } U_i = U(x_i).$$

Obs att

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i(x_j) = U_j$$

eftersom $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ innebär att endast en term (med $i = j$) blir kvar i summan.

Vi har nu en formel som uttrycker $U(x)$ med hjälp av nodvärdena. Vi ska nu bestämma de okända nodvärdena U_i så att $U(x)$ blir en approximativ lösning till randvärdesproblemet (5). Vi använder den svaga formuleringen i (8). För att det inte ska bli så mycket att skriva genomför vi detta i fallet då $k_0 = k_L = 0$, $g_0 = g_L = 0$:

(9)
$$\int_0^L a \, \mathrm{D}u \, \mathrm{D}v \, \mathrm{d}x = \int_0^L f v \, \mathrm{d}x \quad \text{för alla } v.$$

Istället för $u(x)$ sätter vi in ansatsen $U(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i(x)$ och vi väljer testfunktionerna $v = \phi_j$. Vi får

$$\sum_{i=1}^{N} U_i \int_0^L a \, \mathrm{D}\phi_i \, \mathrm{D}\phi_j \, \mathrm{d}x = \int_0^L f \phi_j \, \mathrm{d}x, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Med beteckningarna

$$a_{ij} = \int_0^L a \, \mathrm{D}\phi_i \, \mathrm{D}\phi_j \, \mathrm{d}x, \quad b_j = \int_0^L f \phi_j \, \mathrm{d}x,$$

blir detta

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \ldots, N,$$

dvs på matrisform:

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = b.$$

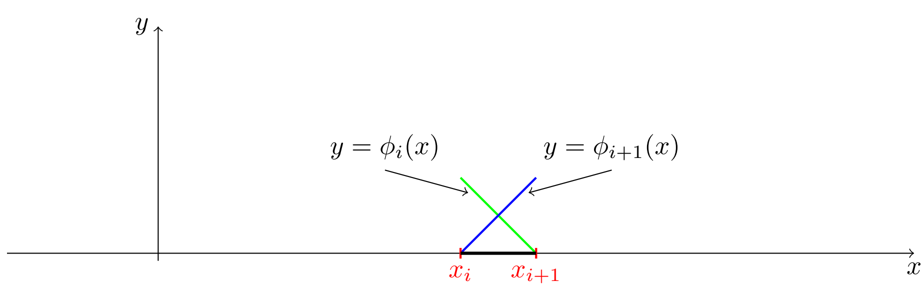
Detta är ett linjärt ekvationssystem av N ekvationer för N obekanta. Matrisen

$$\mathcal{A} = \Big\{a_{ij}\Big\}_{i,j=1}^{N} = \Big\{\int_0^L a\,\mathrm{D}\phi_i\,\mathrm{D}\phi_j\,\mathrm{d}x\Big\}_{i,j=1}^{N}$$

kallas *styvhetsmatris* (*stiffness matrix*). Jämför med stångens ekvation, där $a = EA$ är materialets styvhet. Styvhetsmatrisen är *symmetrisk*, $a_{ji} = a_{ij}$, och *tridiagonal*,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

dvs $a_{ij} = 0$ utom då $j = i-1, i, i+1$. Vektorn $b = \{b_j\}_{j=1}^{N} = \{\int_0^L f\phi_j\,\mathrm{d}x\}_{j=1}^{N}$ kallas *lastvektor* (*load vector*). Intervallet $I_i = (x_i, x_{i+1})$ tillsammans med sina två basfunktioner ϕ_i, ϕ_{i+1} kallas ett *finit element*.



Figur 4: Ett finit element.

Ekvationssystemet $\mathcal{A}\mathcal{U} = b$ kan enkelt ställas upp och lösas med hjälp av ett datorprogram, till exempel, `MyPoisssonSolver.m` i Datorövning 4.

Programmet löser mer allmänna randvärdesproblem av formen

$$\begin{cases} -\mathrm{D}\big(a\,\mathrm{D}u\big) + d\,\mathrm{D}u + cu = f & \text{för } x \in I = (0, L), \\ a\,\mathrm{D_N}u + k\big(u - u_\mathrm{A}\big) = g & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Här har vi även en *konvektionsterm* $d\,\mathrm{D}u$ och en *reaktionsterm* cu.

Randvillkor av typen $u = u_A$ hanteras i detta program approximativt genom att man sätter k lika med ett stort tal, till exempel, $k = 10^8$.

Problem

Bestäm svaga formuleringar för följande randvärdesproblem 1.1–1.3.

Problem 1.1. (Stång)

$$\begin{cases} -\,\mathrm{D}\big(EA\,\mathrm{D}u\big) = K_x A \quad \text{i } (0,L), \\ u(0) = 0, \quad EA\,\mathrm{D}u(L) = P. \end{cases}$$

Tips: $v(0) = 0$.

Problem 1.2.

$$\begin{cases} -\,u'' = f \quad \text{i } (0,L), \\ -\,u'(0) + u(0) = g_0, \quad u(L) = 0. \end{cases}$$

Tips: $v(L) = 0$.

Problem 1.3. (Fritt upplagd balk)

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\big(EI\,\mathrm{D}^2 w\big) = q \quad \text{i } (0,L), \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \\ \mathrm{D}^2 w(0) = 0, \quad \mathrm{D}^2 w(L) = 0. \end{cases}$$

Här är w $[\mathtt{m}]$ utböjning, $I = I_y$ $[\mathtt{m}^4]$ tvärsnittets tröghetsmoment med avseende på y-axeln, EI $[\mathtt{N\,m}^2]$ böjstyvhet och q $\left[\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}}\right]$ lasttäthet i z-riktningen (uppåt). Vridmomentet med avseende på y-axeln är $M = -EI\,\mathrm{D}^2 w$ $[\mathtt{N\,m}]$. Tips: $v(0) = 0$, $v(L) = 0$. Integrera partiellt två gånger.

Lös följande randvärdesproblem genom upprepad integration.

Problem 1.4.

$$\begin{cases} -\,u'' = 1 \quad \text{i } (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Problem 1.5.

$$\begin{cases} -\,\mathrm{D}((1+x)\,\mathrm{D}u) = 2x \quad \text{i } (0,1), \\ -\,\mathrm{D}u(0) + u(0) = 0, \quad u(1) = \tfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Problem 1.6.

$$\begin{cases} -\,\mathrm{D}(a\,\mathrm{D}u) = 0 \quad \text{i } (0,L) \text{ med konstant } a > 0, \\ u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L. \end{cases}$$

Beräkna även värmeflödestätheten $j = -a\mathrm{D}u$.

Problem 1.7. (Fritt upplagd balk)

$$\begin{cases} \mathrm{D}^2\big(EI\,\mathrm{D}^2 w\big) = q \quad \text{i } (0,L) \text{ med } EI \text{ och } q \text{ konstanta} \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \\ \mathrm{D}^2 w(0) = 0, \quad \mathrm{D}^2 w(L) = 0. \end{cases}$$

Problem 1.8.

$$\begin{cases} -\,au'' + u' = 1 \quad \text{i } (0,1) \text{ med konstant } a > 0, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Svar och lösningar

1.1. Finn $u = u(x)$ sådan att $u(0) = 0$ och

$$\int_0^L EA\, u'v' \,\mathrm{d}x = \int_0^L K_x A\, v \,\mathrm{d}x + Pv(L) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = 0.$$

1.2. Finn $u = u(x)$ sådan att $u(L) = 0$ och

$$\int_0^L u'v' \,\mathrm{d}x + u(0)v(0) = \int_0^L fv \,\mathrm{d}x + g_0 v(0) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(L) = 0.$$

1.3. Finn $w = w(x)$ sådan att $w(0) = w(L) = 0$ och

$$\int_0^L EI\, w''v'' \,\mathrm{d}x = \int_0^L qv \,\mathrm{d}x \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = v(L) = 0.$$

1.4. $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

1.5. $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

1.6. $u(x) = (u_L - u_0)\dfrac{x}{L} + u_0$, $j = (u_0 - u_L)\dfrac{a}{L}$. Obs att flödestätheten är konstant och proportionell mot temperaturskillnaden.

1.7. $w(x) = \dfrac{1}{24}\dfrac{qL^4}{EI}\Big(\Big(\dfrac{x}{L}\Big)^4 - 2\Big(\dfrac{x}{L}\Big)^3 + \dfrac{x}{L}\Big)$

1.8. En integration ger $u' - \frac{1}{a}u = -\frac{1}{a}(x + C)$. Multiplicera med den integrerande faktorn $e^{-x/a}$ och integrera igen. Lösningen blir $u(x) = x - (e^{x/a} - 1)/(e^{1/a} - 1)$.

`/stig`