

## FEM1: Randvärdesproblem och finita elementmetoden i en variabel.

1

### Inledning

Vi ska lösa *partiella differentialekvationer* (PDE), dvs ekvationer som innehåller partiella derivator av den okända flervariabelfunktionen  $u = u(x, y, z)$ . Till exempel, Laplaces ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

och Poissons ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Jämför *ordinär differentialekvation* (ODE) från läsperiod 2 som innehåller ordinära derivator av en okänd envariabelfunktion, till exempel,

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

En PDE ställs upp i ett område i rummet,  $D \subset \mathbf{R}^3$ , eller i planet,  $D \subset \mathbf{R}^2$ . För att lösningen ska vara unik behöver vi ge *randvillkor* på randen  $S = \partial D$  till området  $D$ , till exempel,

$$u = 0 \quad \text{på } S.$$

Vi har då ett *randvärdesproblem*.

Man kan också studera tidsberoende PDE, till exempel, värmeledningsekvationen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

och vågekvationen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

PDE uppträder inom många områden: värmeledning, diffusion, hållfasthet, vågutbredning, strömning, elektromagnetiska fält, kvantmekanik och så vidare. Trots olika bakgrund har dessa PDE väsentligen samma matematiska form. Observera, till exempel, att Laplace-operatören

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ingår i samtliga exempel ovan.

Vi löser PDE numeriskt med *finita elementmetoden* (FEM). Denna metod är ett mycket viktigt verktyg för maskiningenjören. Metoden utvecklades på 1950-talet av maskiningenjörer för hållfasthetsberäkningar. FEM bygger på en omskrivning av randvärdesproblemet till en så kallad *svag formulering*.

För enkelhets skull börjar vi med att studera randvärdesproblem och FEM i en variabel, dvs  $u = u(x)$ ,  $x \in I \subset \mathbf{R}$ .

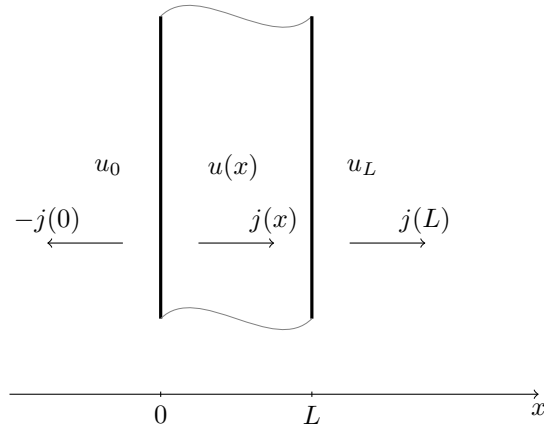
Vi anger SI-enheter inom klammer, till exempel, [K] för temperatur i Kelvin, [m] för längd i meter, [J] för energi i Joule.

<sup>1</sup>18 april 2013, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola

## 1.1 Randvärdesproblem i en variabel

### 1.1.1 Värmeledningsekvationen

Temperaturen  $u(x)$  [K] vid tvärsnittet  $x$  [m] i en platta med tjockleken  $L$  [m], se Figur 1, ges av differentialekvationen



Figur 1: Värmeledning i en platta.

$$(1) \quad D(-a(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in I = (0, L).$$

Här är

- $D = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$  derivata;
- $f(x) \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$  värmekälltätet;
- $u(x)$  [K] temperatur;
- $a(x) \left[ \frac{\text{J}}{\text{mK s}} \right]$  värmeledningskoefficient;
- $j(x) = -a(x)Du(x) \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \right]$  värmeflödestäthet i  $x$ -riktningen (Fouriers lag).

Vi antar här att inga kvantiteter beror av koordinaterna  $y$  och  $z$ . Samma ekvation kan också beskriva värmeledning i en smal stång av längden  $L$ .

Dimensionskontroll: Kontrollera att enheterna i vänster- och högerled stämmer i differentialekvationen i (1).

### 1.1.2 Randvillkor

Vid  $x = L$  gäller att värmeflödestätheten i *utåtriktningen* är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$(2) \quad j(L) = k_L(u(L) - u_L),$$

där

- $u_L$  [K] är den omgivande temperaturen;
- $u(L)$  [K] är temperaturen på insidan av ytan;
- $k_L \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{K s}} \right]$  en värmeöverföringskoefficient.

Å andra sidan är ju flödestätheten enligt Fouriers lag:

$$j(L) = -a(L) Du(L).$$

Alltså:

$$-a(L) Du(L) = k_L (u(L) - u_L),$$

dvs

$$a Du + k_L (u - u_L) = 0 \quad \text{för } x = L.$$

Vid  $x = 0$  är värmeflödestätheten i *utåtriktningen*

$$(3) \quad -j(0) = k_0 (u(0) - u_0),$$

eftersom  $-j(0)$  är flödestätheten i  $-x$ -riktningen (utåt). Men vi har även  $j(0) = -a(0) Du(0)$ . Alltså:

$$-a(0) Du(0) = k_0 (u(0) - u_0).$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva:

$$(4) \quad a D_N u + k (u - u_A) = 0 \quad \text{för } x = 0, L.$$

Här är  $u_A$  den omgivande temperaturen (*ambient temperature*), dvs  $u_A = u_0$  respektive  $u_A = u_L$ , koefficienten  $k = k_0$  respektive  $k = k_L$ , och  $D_N$  riktningsderivatan i utåtriktningen (i den utåtriktade normalens riktning), dvs

$$D_N = -\frac{d}{dx} \text{ i } x = 0, \quad D_N = \frac{d}{dx} \text{ i } x = L.$$

Koefficienten  $k$  anger hur väl isolerad ändpunkten är.

**Specialfall 1:  $k = \infty$ , ingen isolering.** Om vi dividerar med  $k$ ,

$$\frac{1}{k} a D_N u + u - u_A = 0,$$

och låter  $k \rightarrow \infty$  får vi  $0 + u - u_A = 0$ , dvs

$$u = u_A \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

Detta randvillkor innebär att den aktuella ändpunkten,  $x = 0$  eller  $x = L$ , inte är isolerad. Temperaturen är densamma på insidan och på utsidan av randytan.

**Specialfall 2:  $k = 0$ , perfekt isolering.** Med  $k = 0$  får vi

$$a D_N u = 0,$$

dvs inget värmeflöde genom den aktuella ändpunkten. Eftersom  $a > 0$  kan detta förenklas till

$$D_N u = 0 \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

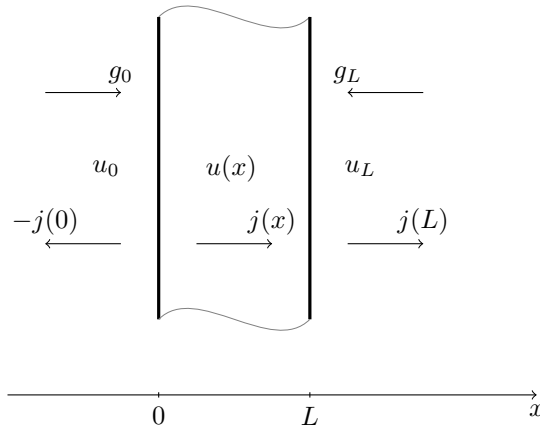
### 1.1.3 Randvärdesproblem

Genom att sätta samman (1) och (4) får vi ett randvärdesproblem.

**Randvärdesproblem.** Finn  $u = u(x)$  sådan att

$$(5) \quad \begin{aligned} -D(aDu) &= f && \text{för } x \in I = (0, L), \\ aD_N u + k(u - u_A) &= g && \text{för } x = 0, L. \end{aligned}$$

Här har vi lagt till ett föreskrivet *inflöde* av värme med flödestätheten  $g$ , där  $g = g_0$  respektive  $g = g_L$ , se Figur 2. Detta görs genom att lägga till termerna  $-g_L$  respektive  $-g_0$  i (2) och (3).



Figur 2: Värmeledning i en platta (med inflöde på randen).

Randvärdesproblemet kan i princip lösas genom att integrera differentialekvationen två gånger och bestämma de två integrationskonstanterna med hjälp av de två randvillkoren. Oftast blir det omöjliga räkningar. Därför ska vi använda FEM!

**Exempel 1.1.** Ett enkelt exempel:

$$\begin{cases} -D(5Du) = 0, & \text{i } I = (0, 1), \\ -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = 0, & \text{(isolering)} \\ u(1) = 0. & \text{(ingen isolering)} \end{cases}$$

Här är  $a = 5$ ,  $f = 0$ ,  $L = 1$ ,  $k_0 = 3$ ,  $u_0 = 2$ ,  $g_0 = 0$ ,  $k_1 = \infty$ ,  $u_1 = 0$ ,  $g_1 = 0$ .

Integrera två gånger:

$$\begin{aligned} -5Du(x) &= C_1 \\ Du(x) &= -\frac{1}{5}C_1 \\ u(x) &= -\frac{1}{5}C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{aligned} 0 &= -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = C_1 + 3C_2 - 6 \\ 0 &= u(1) = -\frac{1}{5}C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Vi får ett linjärt ekvationssystem som löses med Gauss eliminationsmetod:

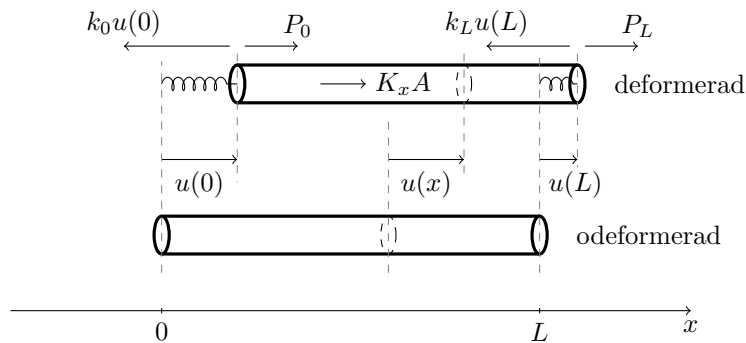
$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6, \\ -C_1 + 5C_2 = 0, \end{cases} \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_1 = \frac{15}{4}$$

Temperaturen och värmeflödestätheten blir

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, \quad j(x) = -aDu(x) = -5Du(x) = C_1 = \frac{15}{4}$$

Observera strukturen hos ekvationerna i randvärdesproblemet (5). Även mekanikens ekvationer har denna form. Till exempel:

**Stångens ekvation.** För en axiellt belastad stång med fjädrande upphängning i ändpunkterna har vi följande randvärdesproblem:



Figur 3: Axiellt belastad stång.

$$(6) \quad \begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{för } x \in I = (0, L), \\ EAD_N u + ku = P & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Här är

- $u$  [m] axiell förskjutning i  $x$ -riktningen;
- $E \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$  Youngs modul,  $A$  [m<sup>2</sup>] tvärsnittsarea,  $EA$  [N] styvhet;
- $K_x \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$  lasttäthet,  $K_x A \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$  last i  $x$ -riktningen;
- $P = P_0$  eller  $P = P_L$  [N] kraft i  $x$ -riktningen;
- $k = k_0$  eller  $k = k_L \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$  fjäderkonstant;
- $\mathcal{N} = EADu$  [N] utåtriktad snittkraft.

Randvillkoren kommer från kraftbalans i ändpunkterna:

$$-\mathcal{N}(0) = P_0 - k_0 u(0), \quad \mathcal{N}(L) = P_L - k_L u(L).$$

**Specialfall 1:**  $k = \infty$ , **fast inspänd ände.** Då  $k \rightarrow \infty$  får vi  $u = 0$ . Det betyder oändligt styv fjädering, dvs stången är fast inspänd i den aktuella ändpunkten  $x = 0$  respektive  $x = L$ .

**Specialfall 2:**  $k = 0$ , **fri ände.** Med  $k = 0$  blir randvillkoret  $EA D_N u = P$ . Det betyder ingen fjäderkraft, dvs den aktuella ändpunkten är fri.

**Konstitutiva lagar.** Ekvationen  $\mathcal{N} = EA Du$  är Hookes lag. Den spelar samma roll som Fouriers lag  $j = -a Du$  i värmeledning. Dessa är exempel på konstitutiva lagar som beskriver materialets egenskaper.

Observera analogin mellan värmeledning och mekanik. Till exempel:

$$\begin{aligned} a &\longleftrightarrow EA \\ j &\longleftrightarrow \mathcal{N} \\ g &\longleftrightarrow P \\ f &\longleftrightarrow K_x A \end{aligned}$$

**Exempel 1.2.** Vi studerar en stång med konstant styvhet som är fast inspänd i högra änden och fri i vänstra änden. Den belastas endast med en kraft i vänstra änden. Randvärdesproblemet blir

$$(7) \quad \begin{cases} -D(EADu) = 0 & \text{för } x \in I = (0, L), \\ -EADu(0) = P_0, \quad u(L) = 0. \end{cases}$$

Eftersom  $EA$  är konstant blir differentialekvationen  $u''(x) = 0$  med allmän lösning  $u(x) = Cx + D$  (integrera två gånger). Randvillkoren ger

$$P_0 = -EA u'(0) = -EAC, \quad 0 = u(L) = CL + D,$$

med lösning  $C = -P_0/EA$ ,  $D = -CL$ . Alltså:

$$u(x) = \frac{P_0}{EA}(L - x).$$

Vi ser att om  $P_0 > 0$  (tryckkraft) så blir  $u(x) > 0$ , dvs stången trycks ihop (förskjutningen är positiv, rörelse åt höger). Om  $P_0 < 0$  (dragkraft) så blir  $u(x) < 0$ , dvs stången förlängs.

## 1.2 Svag formulering

Vi skriver nu om randvärdesproblemet (5) till en så kallad svag form. Vi multiplicerar differentialekvationen

$$-D(a Du) = f$$

med en funktion  $v$  och integrerar partiellt över  $I = (0, L)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= - \int_0^L D(a Du) v \, dx \\ &= - [a Du v]_0^L + \int_0^L a Du Dv \, dx \\ &= a(0) Du(0) v(0) - a(L) Du(L) v(L) + \int_0^L a Du Dv \, dx. \end{aligned}$$

Nu använder vi även randvillkoren från (5):

$$\begin{aligned} a(0) Du(0) &= k_0(u(0) - u_0) - g_0, \\ -a(L) Du(L) &= k_L(u(L) - u_L) - g_L. \end{aligned}$$

Vi får

$$\int_0^L f v \, dx = (k_0(u(0) - u_0) - g_0)v(0) + (k_L(u(L) - u_L) - g_L)v(L) + \int_0^L a \, Du \, Dv \, dx.$$

Vi samlar termer med den obekanta funktionen  $u$  i vänsterledet:

$$\begin{aligned} \int_0^L a \, Du \, Dv \, dx + k_0 u(0)v(0) + k_L u(L)v(L) \\ = \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0)v(0) + (k_L u_L + g_L)v(L). \end{aligned}$$

Denna ekvation ska vara uppfylld för alla val av funktionen  $v$ . Den godtyckliga funktionen  $v$  kallas *testfunktion*. Denna ekvivalenta formulering av randvärdesproblemet kallas *den svaga formuleringen*. Den är grunden för finita elementmetoden.

**Den svaga formuleringen.** Finn en funktion  $u = u(x)$  sådan att ekvationen

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_0^L a \, Du \, Dv \, dx + k_0 u(0)v(0) + k_L u(L)v(L) \\ = \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0)v(0) + (k_L u_L + g_L)v(L) \end{aligned}$$

är uppfylld för alla testfunktioner  $v$ .

(För att formuleringen ska vara helt korrekt måste man även ange vilka funktionsklasser  $u$  och  $v$  ska tillhöra. Vi gör inte det.)

Randvillkoret  $u = u_A$  ( $k = \infty$ ) är lite speciellt. Då måste man välja testfunktionerna med  $v = 0$  i den ändpunkt där randvillkoret  $u = u_A$  gäller. Då blir motsvarande term  $v(0) = 0$  och/eller  $v(L) = 0$  i (8). Vi illustrerar detta i två exempel.

**Exempel 1.3.** Vi skriver ned den svaga formuleringen av Exempel 1.2. Där har vi randvillkoren  $-EA Du(0) = P_0$ ,  $u(L) = 0$ . Vi ska alltså använda testfunktioner med  $v(L) = 0$ . Dessutom har vi  $k_0 = 0$  och ingen kraft,  $K_x A = 0$ , vilket motsvarar  $f = 0$  i (8). Den svaga formuleringen av (7) blir: Finn en funktion  $u = u(x)$  med  $u(L) = 0$  och sådan att ekvationen

$$\int_0^L EA \, Du \, Dv \, dx = P_0 v(0)$$

är uppfylld för alla testfunktioner  $v$  med  $v(L) = 0$ .

Vi kontrollerar att lösningen  $u(x) = \frac{P_0}{EA}(L-x)$  uppfyller den svaga ekvationen. Vi har  $EA \, Du = -P_0$  så att

$$\int_0^L EA \, Du \, Dv \, dx = -P_0 \int_0^L Dv \, dx = -P_0(v(L) - v(0)) = P_0 v(0)$$

för alla  $v$  med  $v(L) = 0$ .

**Exempel 1.4.**

$$\begin{cases} -D((1+x^2)Du) = 1 & \text{i } (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \quad Du(1) = 0. \end{cases}$$

- Skriv ned den svaga formuleringen.
- Lös problemet genom att integrera två gånger.

*Lösning.* (a) Randvillkoret  $u(-1) = 0$  kräver att vi använder testfunktionen  $v$  sådan att  $v(-1) = 0$ . Vi multiplicerar med  $v$  och integrerar:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v \, dx &= - \int_{-1}^1 D((1+x^2) Du) v \, dx \quad \left\{ \text{partiell integration} \right\} \\ &= - \left[ (1+x^2) Du(x) v(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx \\ &= -2 \underbrace{Du(1)}_{=0} v(1) + 2 \underbrace{Du(-1)}_{=0} v(-1) + \int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx. \end{aligned}$$

Den svaga formuleringen är: Finn  $u = u(x)$  sådan att  $u(-1) = 0$  och

$$\int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx = \int_{-1}^1 v \, dx \quad \text{för alla } v \text{ med } v(-1) = 0.$$

(b) Differentialekvationen är

$$D((1+x^2) Du) = -1$$

Vi integrerar:

$$\begin{aligned} (1+x^2) Du &= -x + C, \\ Du(x) &= -\frac{x}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}, \\ u(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \arctan(x) + D. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{aligned} 0 &= u(-1) = -\frac{1}{2} \ln(2) + C \arctan(-1) + D = -\frac{1}{2} \ln(2) - C \frac{\pi}{4} + D, \\ 0 &= Du(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C. \end{aligned}$$

Vi får  $C = 1$ ,  $D = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4}$ . Lösningen är

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4} \\ &= \ln \left( \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \right) + \arctan(x) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Du bör lära dig att bestämma den svaga formuleringen för randvärdesproblem med olika kombinationer av randvillkor samt att lösa *enkla* randvärdesproblem genom att integrera två gånger, se övningarna i slutet av detta häfte. Men det viktigaste är att kunna lösa *allmänna* randvärdesproblem med finita elementmetoden.

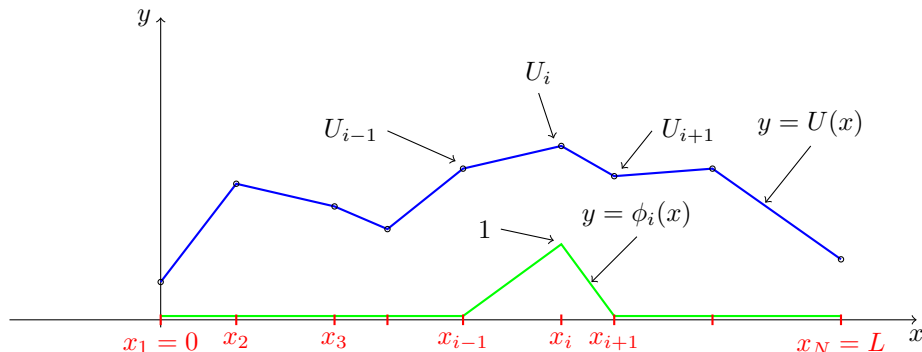
### 1.3 Finita elementmetoden i 1-D

(Finita elementmetoden kallas "finite element method" på engelska, uttalas "fajnajt". Nedan anger vi inom parentes vad vissa viktiga begrepp heter på engelska.)

Vi ska beräkna en approximativ lösning  $U(x)$ , som är en *styckvis linjär funktion*. Vi inför ett beräkningsnät (*mesh*) i intervallet  $I = (0, L)$ :

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_N = L.$$





Figur 4: En styckvis linjär funktion  $y = U(x)$  och en basfunktion  $y = \phi_i(x)$ .

Obs: vi använder "MATLAB-numrering" som börjar med 1. Vi har alltså  $N$  punkter (kallas även noder)  $x_i$  och  $N - 1$  intervall  $I_i = (x_i, x_{i+1})$  av längd  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Se Figur 4.

En kontinuerlig styckvis linjär funktion  $U(x)$  är entydigt bestämd av sina nodvärden  $U_i = U(x_i)$ . För att beskriva  $U(x)$  inför vi *basfunktionerna*  $\phi_i(x)$ , en för varje nod  $x_i$ . Funktionerna  $\phi_i(x)$  bestäms av att de är kontinuerliga, styckvis linjära, samt att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Se Figur 4. Funktionen  $U(x)$  kan nu skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x), \quad \text{med koefficienterna } U_i = U(x_i).$$

Obs att

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x_j) = U_j$$

eftersom  $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  innebär att endast en term (med  $i = j$ ) blir kvar i summan.

Vi har nu en formel som uttrycker  $U(x)$  med hjälp av nodvärdena. Vi ska nu bestämma de okända nodvärdena  $U_i$  så att  $U(x)$  blir en approximativ lösning till randvärdesproblemet (5). Vi använder den svaga formuleringen i (8). För att det inte ska bli så mycket att skriva genomför vi detta i fallet då  $k_0 = k_L = 0$ ,  $g_0 = g_L = 0$ :

$$(9) \quad \int_0^L a D u D v \, dx = \int_0^L f v \, dx \quad \text{för alla } v.$$

Istället för  $u(x)$  sätter vi in ansatsen  $U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$  och vi väljer testfunktionerna  $v = \phi_j$ . Vi får

$$\sum_{i=1}^N U_i \int_0^L a D \phi_i D \phi_j \, dx = \int_0^L f \phi_j \, dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Med beteckningarna

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_0^L a D \phi_i D \phi_j \, dx, \quad b_j = \int_0^L f \phi_j \, dx,$$

blir detta

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

dvs på matrisform:

$$\mathcal{A}U = b.$$

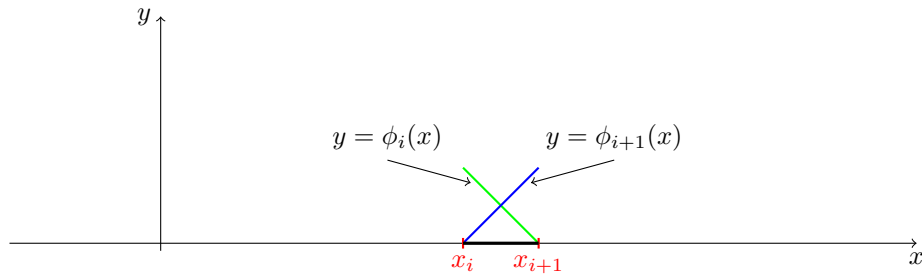
Detta är ett linjärt ekvationssystem av  $N$  ekvationer för  $N$  obekanta. Matrisen

$$\mathcal{A} = \left\{ a_{ij} \right\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L a D\phi_i D\phi_j dx \right\}_{i,j=1}^N$$

kallas *styvhetsmatris* (*stiffness matrix*). Jämför med stångens ekvation, där  $a = EA$  är materialets styvhet. Styvhetsmatrisen är *symmetrisk*,  $a_{ji} = a_{ij}$ , och *tridiagonal*,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

dvs  $a_{ij} = 0$  utom då  $j = i - 1, i, i + 1$ . Vektorn  $b = \{b_j\}_{j=1}^N = \{\int_0^L f\phi_j dx\}_{j=1}^N$  kallas *lastvektor* (*load vector*). Intervallet  $I_i = (x_i, x_{i+1})$  tillsammans med sina två basfunktioner  $\phi_i, \phi_{i+1}$  kallas ett *finit element*.



Figur 5: Ett finit element.

Ekvationssystemet  $\mathcal{A}U = b$  kan enkelt ställas upp och lösas med hjälp av ett datorprogram, till exempel, `MyPoissonSolver.m` i Datorövning 4.

Programmet löser mer allmänna randvärdesproblem av formen

$$\begin{cases} -D(aDu) + dDu + cu = f & \text{för } x \in I = (0, L), \\ aD_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Här har vi även en *konvektionsterm*  $dDu$  och en *reaktionsterm*  $cu$ .

Randvillkor av typen  $u = u_A$  hanteras i detta program approximativt genom att man sätter  $k$  lika med ett stort tal, till exempel,  $k = 10^8$ .

## Problem

Bestäm svaga formuleringar för följande randvärdesproblem 1.1–1.3.

**Problem 1.1.** (Stång)

$$\begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{i } (0, L), \\ u(0) = 0, \quad EADu(L) = P. \end{cases}$$

Tips:  $v(0) = 0$ .

**Problem 1.2.**

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{i } (0, L), \\ -u'(0) + u(0) = g_0, \quad u(L) = 0. \end{cases}$$

Tips:  $v(L) = 0$ .

**Problem 1.3.** (Fritt upplagd balk)

$$\begin{cases} D^2(EID^2w) = q & \text{i } (0, L), \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \\ D^2w(0) = 0, \quad D^2w(L) = 0. \end{cases}$$

Här är  $w$  [m] utböjning,  $I = I_y$  [m<sup>4</sup>] tvärsnittets tröghetsmoment med avseende på  $y$ -axeln,  $EI$  [Nm<sup>2</sup>] böjstyvhet och  $q$   $\begin{bmatrix} \text{N} \\ \text{m} \end{bmatrix}$  lasttäthet i  $z$ -riktningen (uppåt). Vridmomentet med avseende på  $y$ -axeln är  $M = -EID^2w$  [Nm]. Tips:  $v(0) = 0$ ,  $v(L) = 0$ . Integrera partiellt två gånger.

Lös följande randvärdesproblem genom upprepade integration.

**Problem 1.4.**

$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{i } (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

**Problem 1.5.**

$$\begin{cases} -D((1+x)Du) = 2x & \text{i } (0, 1), \\ -Du(0) + u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

**Problem 1.6.**

$$\begin{cases} -D(aDu) = 0 & \text{i } (0, L) \text{ med konstant } a > 0, \\ u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L. \end{cases}$$

Beräkna även värmeflödestätheten  $j = -aDu$ .

**Problem 1.7.** (Fritt upplagd balk)

$$\begin{cases} D^2(EID^2w) = q & \text{i } (0, L) \text{ med } EI \text{ och } q \text{ konstanta} \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \\ D^2w(0) = 0, \quad D^2w(L) = 0. \end{cases}$$

**Problem 1.8.**

$$\begin{cases} -au'' + u' = 1 & \text{i } (0, 1) \text{ med konstant } a > 0, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

## Svar och lösningar

1.1. Finn  $u = u(x)$  sådan att  $u(0) = 0$  och

$$\int_0^L EA u' v' dx = \int_0^L K_x A v dx + P v(L) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = 0.$$

1.2. Finn  $u = u(x)$  sådan att  $u(L) = 0$  och

$$\int_0^L u' v' dx + u(0)v(0) = \int_0^L f v dx + g_0 v(0) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(L) = 0.$$

1.3. Finn  $w = w(x)$  sådan att  $w(0) = w(L) = 0$  och

$$\int_0^L EI w'' v'' dx = \int_0^L q v dx \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = v(L) = 0.$$

1.4.  $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

1.5.  $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

1.6.  $u(x) = (u_L - u_0)\frac{x}{L} + u_0$ ,  $j = -aj'(x) = a(u_0 - u_L)\frac{1}{L}$ . Obs att flödestätheten är konstant och proportionell mot temperaturskillnaden.

1.7.  $w(x) = \frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \left( \left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} \right)$

1.8. En integration ger  $u' - \frac{1}{a}u = -\frac{1}{a}(x + C)$ . Multiplicera med den integrerande faktorn  $e^{-x/a}$  och integrera igen. Lösningen blir  $u(x) = x - (e^{x/a} - 1)/(e^{1/a} - 1)$ . Plotta med Matlab för några olika värden på  $a$ :

```
>>  
>> a=1; fplot(@(x) x-(exp(x/a)-1)/(exp(1/a)-1),[0,1]), hold on  
>> a=.1; fplot(@(x) x-(exp(x/a)-1)/(exp(1/a)-1),[0,1]), hold on  
>>
```

/stig