Flervariabelanalys

- funktion av flera variabler, t. ex.,

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \qquad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

eller med matrisbeteckningar

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \qquad (\text{i Matlab!})$$

- vektorvärd funktion

$$\mathbf{f}(t) = f_x(t)\mathbf{i} + f_y(t)\mathbf{j} + f_z(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + g_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + g_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$$

med matrisbeteckning

$$f(x) = [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)]$$

- derivera
- integrera
- lösa ekvationer:
  - algebraiska ekv. $f(x) = 0$ Newtons metod
  - partiell diff ekv. $-\nabla \cdot (a\nabla u) = f$ (PDE)

    finita elementmetoden (FEM)

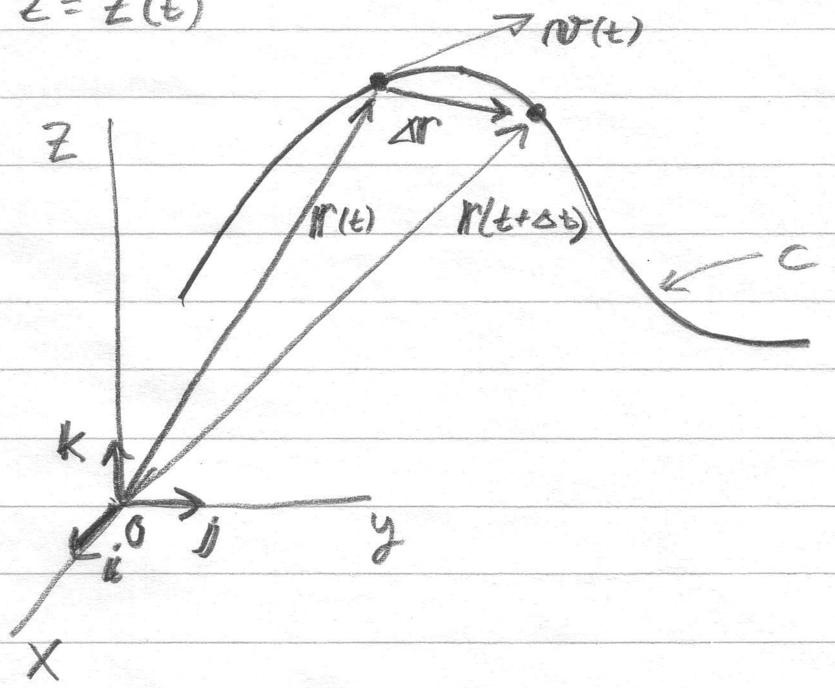
Vårt mål: FEM!

Adams 11.1 Vektorfunktion av en variabel

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ Geometrisk tolkning: läget av en partikel vid tiden t.



Partikel rör sig på en kurva C.

Medelhastighet: $\dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$

Hastighet (velocity): $\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

Fart (speed): $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$

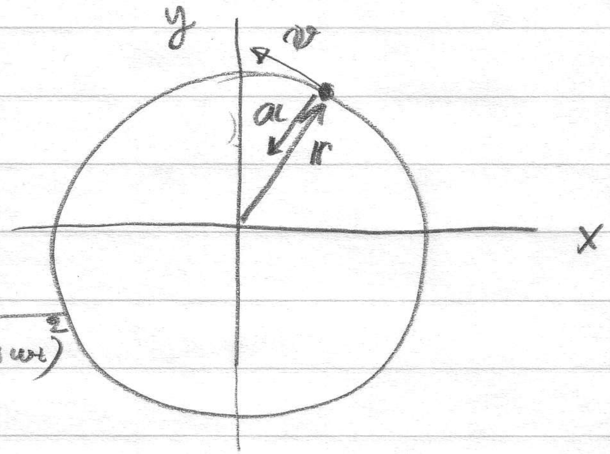
Derivera komponentvis: $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$

Figuren visar: $\mathbf{v}(t)$ är <u>tangentvektor</u> till C i punkten $\mathbf{r}(t)$.

Acceleration $\quad \mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

Exempel (cirkel) $\quad (a>0,\ \omega>0)$

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = a\sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases} \qquad x^2+y^2=a^2$$



$\mathbf{r} = a\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + a\sin(\omega t)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = -a\omega\sin(\omega t)\,\mathbf{i} + a\omega\cos(\omega t)\,\mathbf{j}$

$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-a\omega\sin(\omega t))^2 + (a\omega\cos\omega t)^2}$

$= \sqrt{a^2\omega^2} = |a\omega| = a\omega$

$\mathbf{a} = -a\omega^2\cos(\omega t)\,\mathbf{i} - a\omega^2\sin(\omega t)\,\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}$

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{r}\perp\mathbf{v}$ ortogonala!

Exempel (spets / cusp)

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

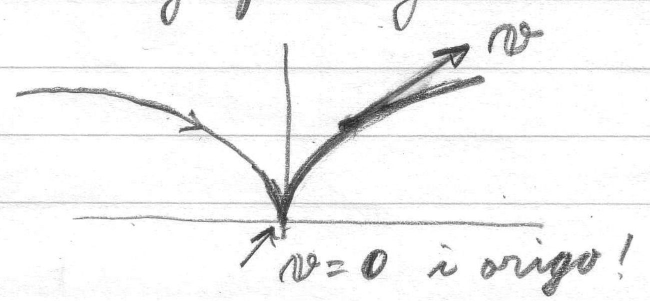
$\mathbf{r} = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$

$\mathbf{a} = 6t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Eliminera t: $t = x^{1/3}$, $y = t^2 = x^{2/3}$

Kurvan är en graf: $y = x^{2/3}$



Sats 1: derivering av kombinationer

Om $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ och $\lambda(t)$ är deriverbara så är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}\circ\lambda$ deriverbara och

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}'+\mathbf{v}' \\
&\text{(b)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda'\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}' \\
&\text{(c)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' \\
&\text{(d)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}' \\
&\text{(e)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t)) \\
&\text{(f)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|} \quad \text{om } \mathbf{u}(t)\neq 0
\end{aligned}
$$

Bevis. Skriv på komponentform och använd de vanliga deriveringsreglerna.

Obs från (c):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'$$

och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|^2 = 2|\mathbf{u}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|$$

vilket ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}| = \frac{1}{2|\mathbf{u}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2|\mathbf{u}|}2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}|}$$

Detta är ett alternativt bevis av (f).
Det är enklare att räkna med $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ än med $|\mathbf{u}|$!

Adams 11.3 Parametrisering av kurva.

En kurva i rummet är en punktmängd av formen:

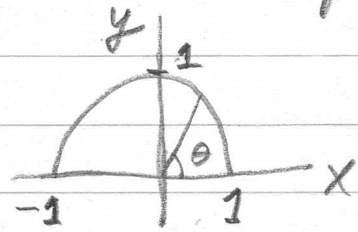
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]$$

där koordinatfunktionerna är kontinuerliga (så att den hänger ihop).

Vi antar även att $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ är kontinuerlig, annars kan kurvan vara patologisk (sjuk), t. ex., fraktal.

Kurvan blir då slät (smooth) utom möjligen där $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ (kom ihåg: spets)

En kurvan kan parametriseras på många sätt.

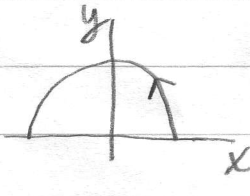


Exempel (halvcirkeln)

a) Välj $t = \theta$.

glöm ej ange intervallet!

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ z = 0 \end{cases}$$



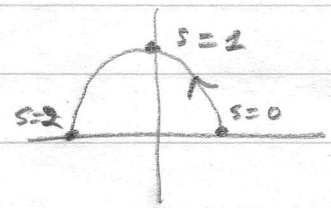
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$$

b) Välj $s = 1 - x$.

$$\begin{cases} x = 1 - s, \\ y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(1-s)^2}, \\ z = 0 \end{cases} \qquad s \in [0, 2].$$

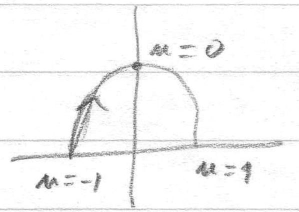
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\mathbf{i} + \frac{2(1-s)}{2\sqrt{1-(1-s)^2}}\,\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-(1-s)^2}}$$



c) Välj $u = x$.

$$\begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{1-u^2} \\ z = 0 \end{cases}, \qquad u \in [-1, 1]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{i} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathbf{j}, \qquad \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Byte av parameter:

(kedjeregeln) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\underbrace{\dfrac{ds}{dt}}_{\text{skalär}}$

påverkar farten och byter riktning om $\dfrac{ds}{dt} < 0$

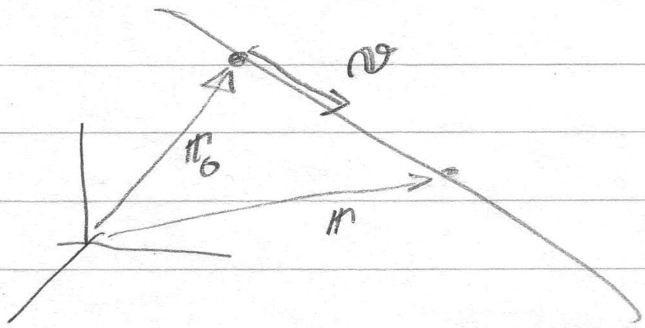
I vårt exempel: $\dfrac{ds}{du} = \dfrac{d(1-x)}{dx} = -1$

Exempel (rät linje)

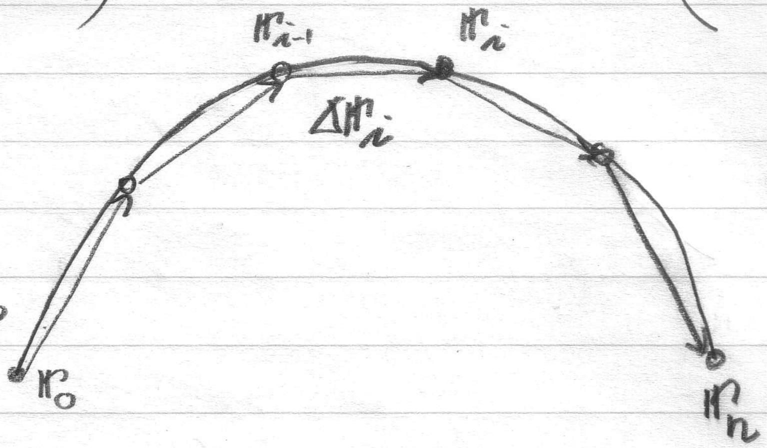
$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$



Båglängd (arc length)



$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$

Nät (mesh):

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = b$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$, $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$

Kurvans längd approximeras av:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\Delta \mathbf{r}_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

Om $\max \Delta t_i \to 0$ och $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ är kontinuerlig får vi kurvans längd:

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Båglängden är

$$s(\tilde{t}) = \int_a^{\tilde{t}} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Vi får $s'(t) = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| = v(t)$ (farten)

båglängdselementet

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

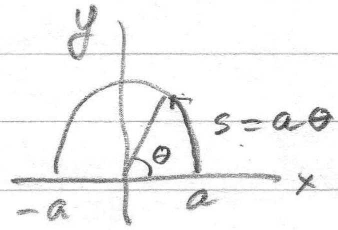
Båglängden kan också användas som parameter:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s \in [0, L]$$

Då blir farten

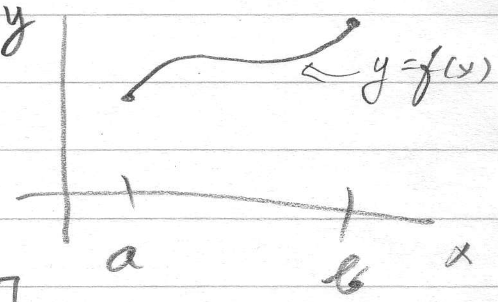
$$v(s) = \frac{ds}{ds} = 1 .$$

<u>Exempel</u> (halvcirkel)



$$\begin{cases} x = a\cos\left(\frac{s}{a}\right) \\ y = a\sin\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases}, \quad s \in [0, a\pi]$$

<u>Exempel</u> (graf i planet)



$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Välj $t = x$: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + f'(t)\,\mathbf{j}, \quad v(t) = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

eller $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx .$