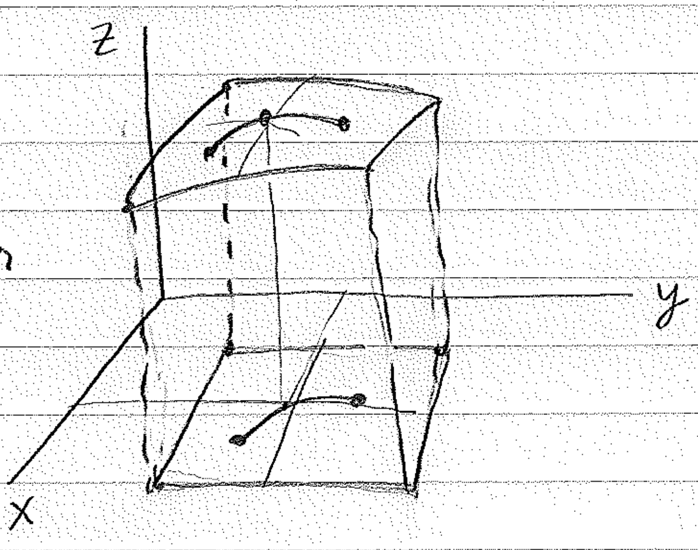
FÖ 2.1

12.5 Kedjeregeln (endast sid 693–696 + example 10 sid 700)

En partikel rör sig på en yta

$z = f(x,y)$.



Om partikelns x,y-koordinater är

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

så är höjden vid tiden t

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t).$$

Höjdändringen per tidsenhet blir

$$\frac{dz}{dt} = g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = u(t+h) - u(t) \\ \Delta v = v(t+h) - u(t) \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t)+\Delta u, v(t)+\Delta v) - f(u(t), v(t)+\Delta v)}{\Delta u} \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t), v(t)+\Delta v) - f(u(t), v(t))}{\Delta v} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

Det verkar som om gränsvärdet blir

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_1'(u(t), v(t))\, u'(t) + f_2'(u(t), v(t))\, v'(t)$$

Kan också skrivas

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

På matrisform:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = \begin{bmatrix} f_1'(u(t), v(t)) & f_2'(u(t), v(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$$

eller

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

Obs att de partiella derivatorna $f_1'(u,v)$, $f_2'(u,v)$ bildar en radvektor medan de ordinära derivatorna $u'(t)$, $v'(t)$ bildar en kolonnvektor.

En annan version av kedjeregeln.

$$z = f(x,y), \quad x = u(s,t), \quad y = v(s,t)$$

$$z = f(u(s,t), v(s,t)) = g(s,t)$$

$$\begin{cases} g_1'(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} g(s,t) = f_1'(u(s,t), v(s,t))\, u_1'(s,t) + f_2'(u(s,t), v(s,t))\, v_1'(s,t) \\ g_2'(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} g(s,t) = f_1'(u(s,t), v(s,t))\, u_2'(s,t) + f_2'(u(s,t), v(s,t))\, v_2'(s,t) \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

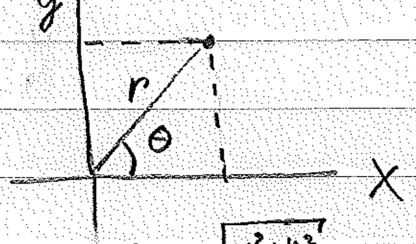
På matrisform:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Fler versioner är möjliga beroende på hur många variabler som man har.

Exempel 10 Laplaces ekvation i polära koordinater.

Antag $z = f(x,y)$ och inför polära koordinater



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Bevis. Vi beräknar vänsterledet med kedjeregeln.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} \overset{\theta = \text{konstant}}{=} \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+ \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \overset{r=\text{konstant}}{=} -r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}\right) + r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= -r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= -r\frac{\partial z}{\partial r} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+ r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= -r\frac{\partial z}{\partial r} + r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Alltså:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Att kunna räkna med polära koordinater är mycket viktigt.

I övning 12.5:24 görs detta på ett annat sätt.

12.6 Deriverbarhet

(endast sid 703-709, Sats 4, 5 utan bevis)

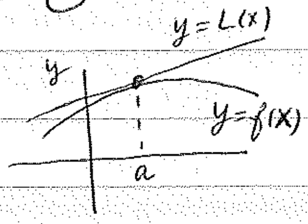
För att kunna bevisa kedjeregeln måste man veta vad som menas med att en flervariabelfunktion är <u>deriverbar</u>.

Kom ihåg ~~en variabel~~ ordinär derivata (en-variabelfunktion):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

dvs

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)\cdot h}{h} = 0$$



Med $x = a+h$, $h = x-a$ har vi <u>linjäriseringen</u> av f <u>i a</u>:

$$L(x) = f(a) + f'(a)h = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Ekvationen $y = L(x)$ dvs
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$
är ekv. för tangententen till grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.

Två-variabelfunktion. Linjäriseringen av $f(x,y)$ i punkten (a,b) är med $x = a+h$, $y = b+k$

$$L(x,y) = f(a,b) + f_1'(a,b)h + f_2'(a,b)k$$

$$= f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)$$

Ekvationen $z = L(x,y)$ dvs

$$z = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)$$

är ekvationen för tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$. Se sidan ~~654~~. 685.

Om detta ska vara sant så måste $L(x,y)$ vara en bra approximation till $f(x,y)$ nära punkten (a,b).

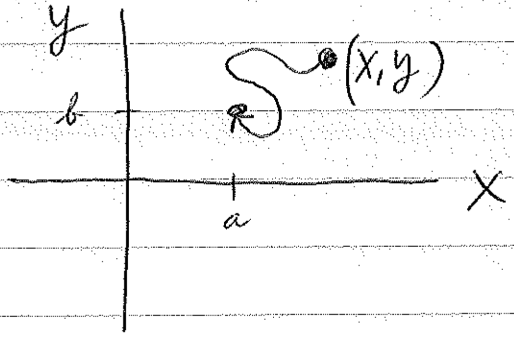
Vi använder detta vilkor som definition av deriverbarhet.

<u>Definition 5</u> Funktionen $f(x,y)$ är deriverbar ("differentiable") i (a,b) om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_1'(a,b)h-f_2'(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Obs: $\sqrt{h^2+k^2}$ är avståndet mellan $(x,y)=(a+h,b+k)$ och (a,b).

Obs: vi har hittills bara krävt att f ska vara partiellt deriverbar dvs att $f_1'(a,b)$, $f_2'(a,b)$ ska existera. Men det innebär bara att linjäriseringen är en bra approximation längs x och y-axlarna separat och funktionen behöver inte ens ~~kontin~~ vara kontinuerlig i (a,b). Nu kräver vi att approximationen ska vara bra oavsett längs vilken väg vi närmar oss (a,b).



Skippa Sats 3.

Nu kan man ~~bevisa Sats~~ formulera och bevisa Sats 4 & 5.

Vi skippar bevisen.

Sats 4 Om f_1' och f_2' är kontinuerliga i en omgivning av (a, b) så är f deriverbar i (a, b).

Obs: det räcker alltså att de partiella derivatorna existerar och är kontinuerliga nära (a, b) för att f ska vara deriverbar på riktigt.

Sats 5 Kedjeregeln

~~Antag~~ Låt $z = f(x, y)$ med $x = u(s, t)$, $y = v(s, t)$.

Antag (i) $u(a, b) = p$, $v(a, b) = q$,

(ii) $u_1'(a, b)$, $u_2'(a, b)$, $v_1'(a, b)$, $v_2'(a, b)$ existerar,

(iii) f är deriverbar i (p, q).

Då är den sammansatta funktionen $g(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ partiellt deriverbar i (a, b) och kedjeregeln gäller.