FÖ 2.2

12.6 Deriverbarhet
(endast sid 703-709, Sats 4,5 utan bevis)

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_1'(u(t), v(t))u'(t) + f_2'(u(t), v(t))v'(t)$$

Det räcker inte att f är partiellt deriverbar, dvs att partiella derivatorna existerar, utan den måste vara deriverbar.

Vad betyder det?

Kom ihåg ordinär derivata
(för en-variabelfunktion)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dvs $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

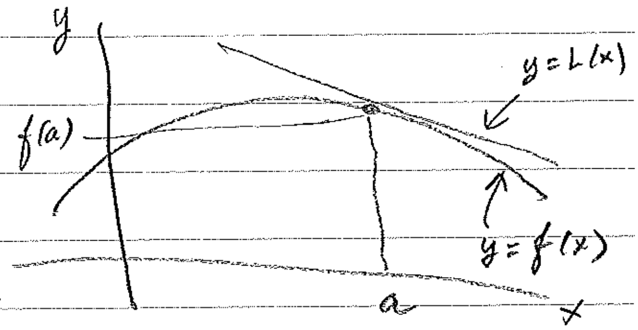
Med $x = a+h$, $h = x-a$ har vi linjäriseringen av f i a:

$$L(x) = f(a) + f'(a)h = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Ekvationen $y = L(x)$

dvs $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

är tangentlinjen till grafen $y = f(x)$.
i punkten $(a, f(a))$.



Linjär approximation:

$f(x) \approx L(x)$ om $x \approx a$.

Två variabelfunktion: med
$x = a+h$, $y = b+k$ är linjäriseringen
av $f(x,y)$ i (a,b)

$$L(x,y) = f(a,b) + f_1'(a,b)h + f_2'(a,b)k$$

$$= f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b).$$

Ekv. $z = L(x,y)$ är ekv. för
tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$.
(se sid 685).

Om detta ska gälla måste linjäriseringen
vara en bra approximation till f
nära (a,b): $f(x,y) \approx L(x,y)$, om $(x,y) \approx (a,b)$.

Def 5 Funktionen $f(x,y)$ är

deriverbar ("differentiable")

i (a,b) om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_1'(a,b)h-f_2'(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Sats 4 Om de partiella derivatorna är kontinuerliga i omgivning till (a,b) så är f deriverbar.

Sats 5 Om den yttre funktionen är deriverbar och den inre funktionen är partiellt deriverbar så gäller kedjeregeln.

Jacobi + Newton

Derivator med matrisbeteckningar.

Funktion av två variabler, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_1, x_2)$$

baspunkt $a = (a_1, a_2)$
ändring $h = (h_1, h_2) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)$

Linjärisering:

$$L(x) = f(a) + f_1'(a)h_1 + f_2'(a)h_2$$

$$= f(a) + [f_1'(a), f_2'(a)] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Jacobi-matrisen (derivatan):

$$f'(a) = Df(a) = [f_1'(a), f_2'(a)]$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)h$$

$$= f(a) + f'(a)(x - a)$$

Ex. $f(x) = x_1 \sin(x_2)$, $a = (1, 0)$
$f_1'(x) = \sin(x_2)$, $f_2'(x) = x_1 \cos(x_2)$
$f'(a) = f'(1,0) = [0, 1]$, $f(x) \approx L(x) = 0 + [0, 1] \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \end{bmatrix}$

Två funktioner av två variabler: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$L_1(x) = f_1(a) + f'_{1,1}(a)\,h_1 + f'_{1,2}(a)\,h_2$$

$$L_2(x) = f_2(a) + f'_{2,1}(a)\,h_1 + f'_{2,2}(a)\,h_2$$

Jacobi-matrisen:

$$f'(a) = Df(a) = \begin{bmatrix} f'_{1,1}(a) & f'_{1,2}(a) \\ f'_{2,1}(a) & f'_{2,2}(a) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{1,1}(a) & f'_{1,2}(a) \\ f'_{2,1}(a) & f'_{2,2}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= f(a) + f'(a)\,h$$

Allmänt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$f'(a) = Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

$m \times n$

Kedjeregeln:

1. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
2. $b = g(a)$
3. $f'(b)$ och $g'(a)$ existerar

Då är $u = f \circ g$, dvs $u(x) = f(g(x))$ deriverbar i a och

$$\underbrace{u'(a)}_{p \times n} = \underbrace{f'(b)}_{p \times m} \underbrace{g'(a)}_{m \times n}$$