FÖ 2.3

12.7 Gradient och riktningsderivata

(ej "Rates percieved..." sid 720)

I FÖ 2.2:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Derivatan är

$$f'(a) = Df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] \text{ (radmatris)}$$

om f är deriverbar i a, dvs

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)}{|h|} = 0.$$

Nu använder vi geometriska beteckningar, och inför gradienten till $f(x,y)$ i (x,y):

$$\bar{\nabla} f(x,y) = f'_x(x,y)\bar{i} + f'_y(x,y)\bar{j}.$$

Obs att

- $\bar{\nabla} f(x,y)$ är en vektorvärd funktion (vektorfält)
- $f(x,y)$ är en skalärvärd funktion (skalärt fält)
- nabla operatorn: $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j}$

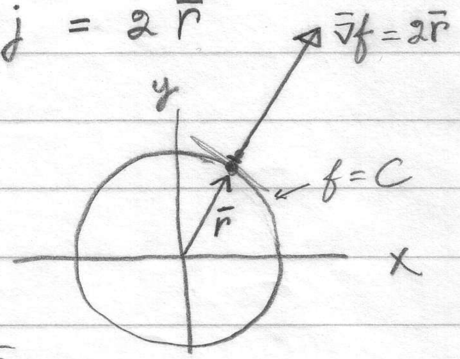
- nabla verkar på f:

$$\bar{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j}\right) f$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$$

- gradienten skrivs ofta $\overline{\text{grad}}\, f$ (jag gör inte det).

<u>Exempel</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\bar{\nabla} f(x,y) = 2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} = 2\,\bar{r}$$



Obs: $\bar{\nabla} f$ är ortogonal mot nivåkurvorna
$f(x,y) = C$
utom i origo där $\bar{\nabla} f(0,0) = \bar{0}$.

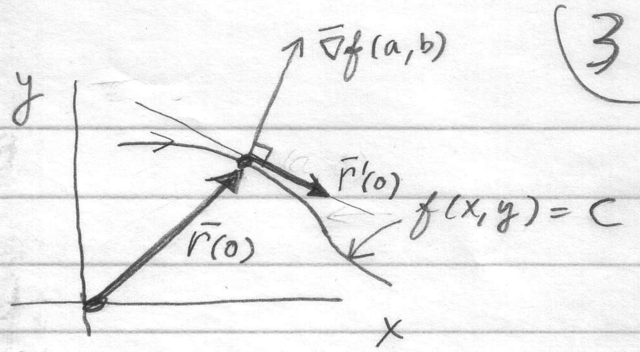
(med bevis!)

<u>Sats 6</u> Antag
- f deriverbar i (a,b)
- $\bar{\nabla} f(a,b) \neq \bar{0}$

Då är $\bar{\nabla} f(a,b)$ en normalvektor till nivåkurvan till f genom (a,b).

<u>Bevis</u> Parametrisera nivåkurvan,
$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}$, så att $x(0)=a$, $y(0)=b$.

Eftersom $f(x,y)=C$ på kurvan så gäller



$$f(x(t),y(t)) = C = f(a,b)$$

Kedjeregeln ger nu

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) =$$

$$= f_x'(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y'(x(t),y(t))\,y'(t)$$

$$= \left(f_x'(x(t),y(t))\bar{i} + f_y'(x(t),y(t))\bar{j}\right)\bullet\left(x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j}\right)$$

$$= \bar{\nabla} f(x(t),y(t)) \bullet \bar{r}'(t)$$

Speciellt med $t=0$ får vi

$$\bar{\nabla} f(a,b) \bullet \bar{r}'(0) = 0$$

dvs gradienten $\bar{\nabla} f(a,b)$ är ortogonal mot tangenten $\bar{r}'(0)$.

Obs: f måste vara deriverbar för att vi ska använda kedjeregeln. Det räcker inte att f är partiellt deriverbar.

Riktningsderivata

Låt $\bar{u} = u\bar{i} + v\bar{j}$ vara en enhetsvektor, dvs $|\bar{u}| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$.

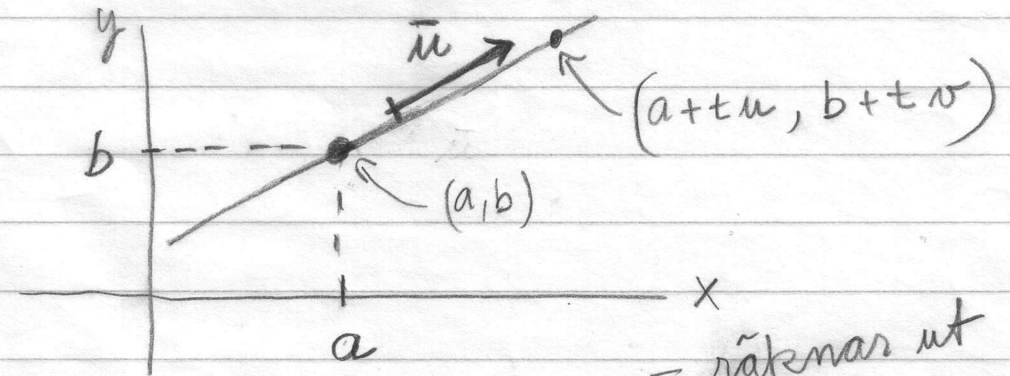
Riktningsderivatan av f i (a,b) i riktningen $\bar{u}$ är

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv)\Big|_{t=0}$$

Obs: vi deriverar en-variabelfunktionen

$g(t) = f(a+tu, b+tv)$ i punkten $t=0$

dvs $D_{\bar{u}} f(a,b) = g'(0)$.



Funktionen $g(t)$ $\overbrace{\text{evaluerar}}^{=\text{ räknar ut}}$ f längs räta linjen genom (a,b) med riktningsvektorn $\bar{u}$.

Sats 7 (med bevis!) Om f är deriverbar i (a,b) så gäller

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \bullet \bar{\nabla} f(a,b)$$

Bevis. Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt} f(a+tu,\, b+tv) =$$

$$= f_x'(a+tu,\, b+tv)\, u + f_y'(a+tu,\, b+tv)\, v$$

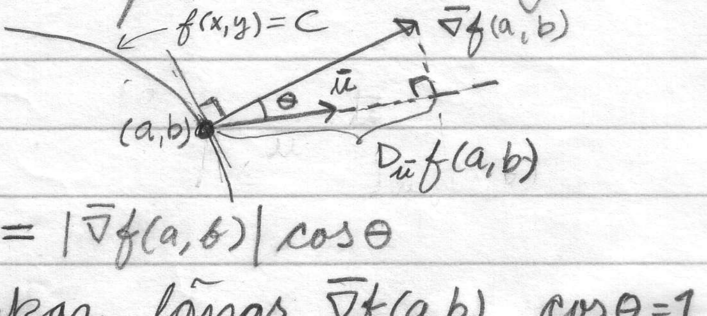
$$= \bar{u} \bullet \bar{\nabla} f(a+tu,\, b+tv)$$

Med $t=0$ får vi

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \bullet \bar{\nabla} f(a,b) .$$

Obs: $\bar{u} \bullet \bar{\nabla} f(a,b)$ är den skalära projektionen av gradientvektorn på riktningen $\bar{u}$.

(Se Adams 10.2.)



$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \bullet \bar{\nabla} f(a,b) = |\bar{\nabla} f(a,b)| \cos\theta$$

är maximal då $\bar{u}$ pekar längs $\bar{\nabla} f(a,b)$, $\cos\theta = 1$.

Alltså: $\bar{\nabla} f(a,b)$ pekar i den riktning där f ökar mest i (a,b).

Skippa 12.8.

12.9 Taylors formel.

Endast Taylor-polynom av grad 2. (sid 703-709)

Kom ihåg Taylors formel i en variabel: $(x = a+h)$

$$F(x) = F(a+h) = F(a) + F'(a)\,h + \frac{1}{2}F''(a)\,h^2 + R_2(a,h)$$

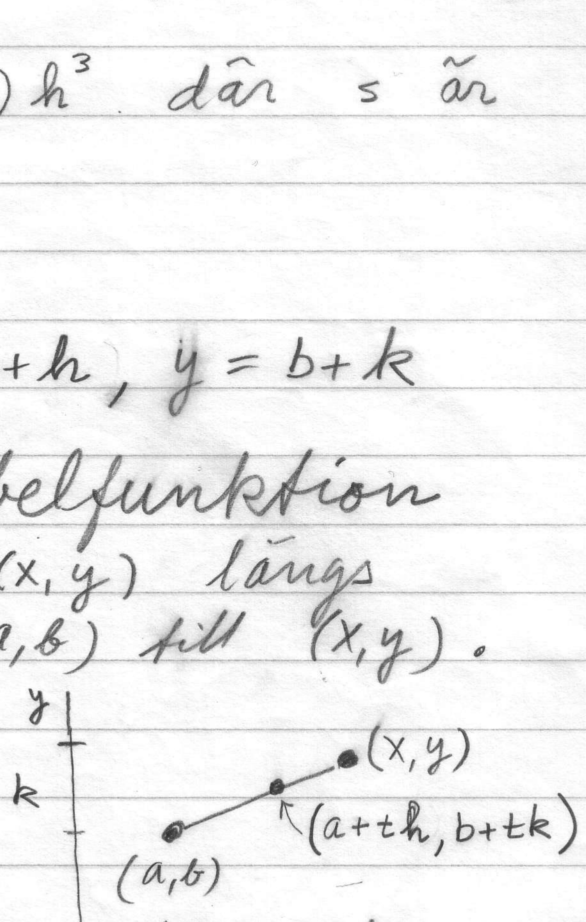
med $R_2(a,h) = \frac{1}{3!}F'''(s)\,h^3$ där s är mellan a och x.

Två variabler. $x = a+h$, $y = b+k$

Bilda en en-variabelfunktion genom att evaluera $f(x,y)$ längs räta linjen från (a,b) till (x,y).

$$F(t) = f(a+th,\, b+tk)$$

$0 \le t \le 1$



$$F(0) = f(a,b)$$

$$F(1) = f(x,y) = f(a+h,\, b+k)$$

Skriv ned Taylors formel för F:

$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \frac{1}{2}F''(0)1^2 + \frac{1}{6}F'''(s)1^3.$$

där $0 \leq s \leq 1$.

Här är (kedjeregeln!)

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th,\ b+tk) =$$

$$= f'_x(a+th,\ b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$

$$F'(0) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k =$$

$$= [f'_x(a,b) + f'_y(a,b)]\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$F''(t) = f''_{xx}(a+th,\ b+tk)h^2 +$$

$$+ f''_{xy}(a+th,\ b+tk)hk$$

$$\left(f''_{xy} = f''_{yx}\right) \qquad + f''_{yx}(a+th,\ b+tk)kh$$

$$+ f''_{yy}(a+th,\ b+tk)k^2$$

$$F''(0) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$$

$$= [h,k]\begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Taylors polynom av grad 2:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)$$

$$= f(a,b) + \left[f'_x(a,b),\ f'_y(a,b)\right]\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Obs (gradientvektorn) Jacobi-matrisen

$$\nabla f(a,b) = f'(a,b) = \left[f'_x(a,b) \quad f'_y(a,b)\right] \text{ rad}$$

och Hesse-matrisen:

$$D^2 f(a,b) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix}$$ symmetrisk matris

Taylors formel (grad 2):

$$f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$$

där $R_2(x,y) = \frac{1}{6}F'''(s) = \frac{1}{6}\left(f'''_{xxx}h^3 + 3f'''_{xxy}h^2k +\right.$

$\left. + 3f'''_{xyy}hk^2 + f'''_{yyy}k^3\right)$, där alla derivatorna evalueras i den (okända) mellanliggande punkten $(a+sh, b+sk)$, $0 \le s \le 1$.

(Resttermen kan ej skrivas matrisform. Varför?)

Mer allmänt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$

$$f(x) = f(a+h) =$$

$$= f(a) + f'(a) h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R_2(x)$$

där $f'(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

symmetrisk: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Obs formen: $f(a+h) = f(a) + [\cdots] \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\cdots] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} + R$

$$= f(a) + f'(a) h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R_2$$