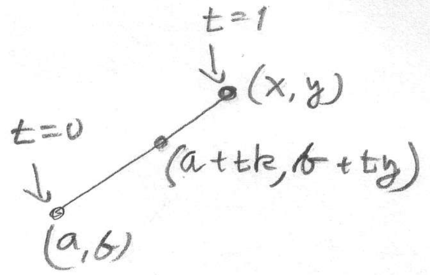
FÖ 3.1 (Från FÖ 2.3)

0

Taylors formel (grad 2):



$$F(t) = f(a+tk, b+tk)$$

$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \tfrac{1}{2}F''(0)1^2 + R_2$$

$R_2 = \frac{1}{6}F'''(s)1^3$, s mellan 0 och 1.

Räkna ut dessa:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_x(a,b)k +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(f''_{xx}(a,b)h^2 + \underbrace{f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yx}(a,b)kh}_{=2f''_{xy}(a,b)hk} + f''_{yy}(a,b)k^2$$

$$+ R_2(x,y)$$

$$= f(a,b) + \overbrace{\begin{bmatrix} f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \end{bmatrix}}^{=\text{Jacobi}} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix}}_{\text{Hesse-matrisen}} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$+ R_2(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$$

Resttermen är

$$R_2(x,y) = \frac{1}{6}F'''(s) = \frac{1}{6}\left(f'''_{xxx}h^3 + 3f'''_{xxy}h^2k + 3f'''_{xyy}hk^2 + f'''_{yyy}k^3\right)$$

Allmänt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)\,h}_{[\cdots]\left[\vdots\right]} + \frac{1}{2}\underbrace{h^T f''(a)\,h}_{[\cdots]\left[\ddots\right]\left[\vdots\right]} + R_2(x).$$

FÖ 3.1 <u>Extremvärdesproblem</u>

Adams 13.1

Mycket ingenjörsarbete går i grunden ut på att <u>optimera</u> dvs minimera eller maximera en funktion. T. ex. maximera utbytet av en process, minimera materialåtgången, ...

Dvs

$$\max f(x)$$

eller $$\min f(x)$$

Obs $$\max f(x) = \min(-f(x)).$$

Ofta många variabler:

$$\max f(x_1, .., x_n)$$

Det handlar om att <u>sortera</u> värdena, oerhört kostsam beräkning.

Ofta kan man ta en genväg med flervariabel-analys: i max-punkt gäller

$$f'(x) = 0$$

Ekvationssystem, Newtons metod.

Matematisk disciplin: <u>optimeringslära</u>.

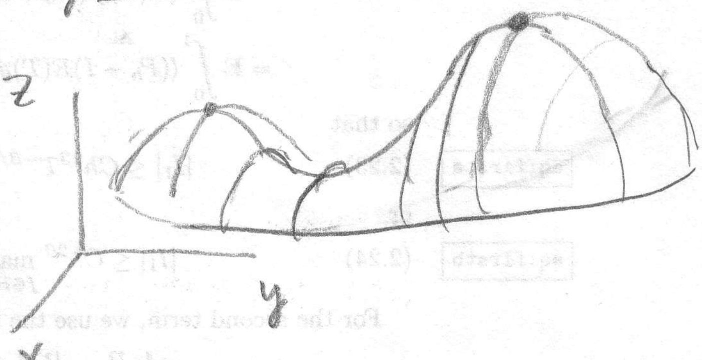
13.1 Extremvärden

två variabler $z=f(x,y)$

Funktionen f har <u>lokalt maximum</u> i (a,b) om

$$f(x,y) \le f(a,b) \text{ för alla } (x,y) \in D_f$$

som är <u>tillräckligt nära</u> (a,b).



Funk. f har <u>globalt maximum</u> i (a,b) om

$$f(x,y) \le f(a,b) \quad \text{för alla } (x,y) \in D_f.$$

Extremvärde = maximum eller minimum, dvs värdet $f(a,b)$.

Extrempunkt = punkten (a,b) där extremvärdet inträffar.

Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde)

Om f har extremvärde i (a,b) så är (a,b) en av följande:

(a) kritisk punkt till f, dvs $\bar{\nabla} f(a,b) = \bar{0}$,

(b) singulär punkt till f, dvs $\bar{\nabla} f(a,b)$ existerar ej,

(c) randpunkt till ~~#~~ D_f.

Bevis Antag att (a,b) är en punkt som inte är en kritisk, singulär eller randpunkt till f. Då är (a,b) en inre punkt där $\bar{\nabla} f(a,b)$ existerar och $\bar{\nabla} f(a,b) \neq \bar{0}$. Bilda riktningsvektorn

$\bar{u} = \dfrac{\bar{\nabla} f(a,b)}{|\bar{\nabla} f(a,b)|}$. Vi har då riktnings-

derivatorna $D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a,b) = \dfrac{\bar{\nabla} f \cdot \bar{\nabla} f}{|\bar{\nabla} f|} = |\bar{\nabla} f(a,b)| > 0$ och $D_{(-\bar{u})} f(a,b) = -\bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a,b) = -|\bar{\nabla} f(a,b)| < 0$

Dvs f ökar i en riktning och minskar i en riktning när vi lämnar (a,b).

Alltså: inget max eller min i (a,b).

~~Alltså inget max eller min i (a, b)~~

Samma sak gäller i N variabler: $f(x_1, \ldots, x_N)$.

Satsen talar om i vilka punkter vi ska söka extrempunkter. Men den garanterar inte att det finns extrempunkter.

Men det gör denna sats.

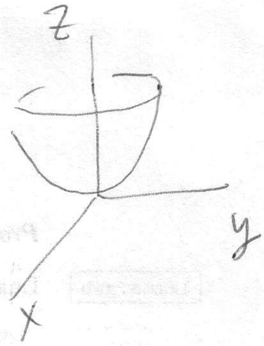
Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde.)

Om f är kontinuerlig och $D_f \subset \mathbb{R}^N$ är sluten och begränsad så finns punkter i D_f där f har max och min.

~~absoluta~~ globala

(utan bevis)

<u>Exempel</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$



$\bar{\nabla} f(x,y) = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} = \bar{0}$

$\Rightarrow \quad x = 0, \ y = 0$

Alltså: kritisk punkt i $(0,0)$

Vi ser att vi har ~~lokalt~~ globalt min. i $(0,0)$:

$$x^2 + y^2 > 0 \quad \text{om } (x,y) \neq (0,0)$$

f har maxvärdet 1 på slutna disken $\{x^2+y^2 \leq 1\}$.
f har <u>inget</u> <u>maximum</u> på öppna disken $\{x^2+y^2 < 1\}$.

<u>Exempel</u> $f(x,y) = y^2 - x^2$

$\bar{\nabla} f(x,y) = -2x\bar{i} + 2y\bar{j} = \bar{0}$

$\Rightarrow \quad x = 0, \ y = 0$

Kritisk punkt i $(0,0)$

Varken max eller min:

$$f(x,0) = -x^2 < f(0,0) = 0 \quad \text{om } x \neq 0$$

$$f(0,y) = y^2 > f(0,0) = 0 \quad \text{om } y \neq 0$$

Sadelpunkt.

Vi säger att en inre kritisk punkt är <u>sadelpunkt</u> om den är varken max. eller min. punkt.

Hur vet man om en kritisk punkt är max/min eller sadel? Nästa sats ger delvis svar.

<u>Sats 3</u> (Andra-derivat-testet)

Antag $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ har en kritisk punkt i en inre punkt a till D_f. Antag att alla andra ordn. part. derivatas till f är kont. i omgivning till a, så att Hesse-matrisen

$$H(x) = f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & \cdots & f''_{N1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{N1}(x) & \cdots & f''_{NN}(x) \end{bmatrix} \quad (N \times N)$$

också är kont. Obs: $H(x)$ är symmetrisk eftersom derivatorna är kont. i omgivning av a (Sats 1 i 12.4). Då gäller:

a) $H(a)$ positivt definit $\Rightarrow$ lok. min i a.

b) $H(a)$ negativt definit $\Rightarrow$ lok max i a.

c) $H(a)$ indefinit $\Rightarrow$ sadelpunkt i a.

d) Om $H(a)$ varken pos, neg. definit eller indefinit så ger testet ingen information.

Kom ihåg från linjär algebra:
En symmetrisk matris A, dvs $A^T = A$, är

a) pos. def. $\Leftrightarrow x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0 \Leftrightarrow$ alla egenvärden $\lambda_j > 0$

b) neg. def $\Leftrightarrow x^T A x < 0 \ \forall x \neq 0 \Leftrightarrow$ — " — $\lambda_j < 0$

c) indefinit $\Leftrightarrow x^T A x > 0$ och $y^T A y < 0$ för några x, y

$\Leftrightarrow A$ har både pos och neg egenvärden.

Obs att funktionen $g(x) = x^T A x$, $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

är en kvadratisk funktion:

$$g(x) = [x_1, \dots, x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{NN} x_N^2$$

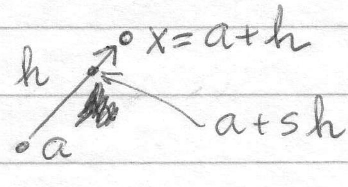
Kallas även <u>kvadratisk form</u>.

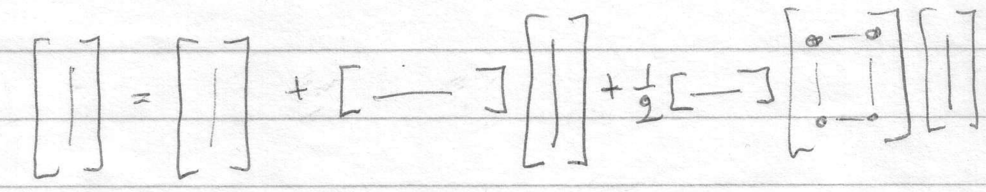
<u>Bevis av Sats 3.</u>

Taylors formel av grad 1: $(x = a + h)$

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh) h$$

där $0 \le s \le 1$.



på formen: 

Här är $f'(a) = 0$ (kritisk punkt),
så att

$$f(x) = f(a) + \tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh) h$$

Om $f''(a)$ är positivt definit så är även $f''(a+sh)$ positivt definit om $|h|$ är liten. I så fall:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\tfrac{1}{2} h^T f''(a+sh)h}_{>0} > 0$$

för alla h med $|h|$ litet.

Alltså: lok. min. i a.

Det bevisar a). De andra fallen bevisas på liknande vis.

[Undersök de krit. punkterna till f.]

Lösningsmetod.

1) Krit. punkter ges av

$$f'(x)^T = 0$$

~~Linjärt~~ Ekvationssystem. Löses för hand eller bättre med Newtons metod.

2) För varje kritisk punkt a ställer vi upp Hesse-matrisen

$$H(a) = f''(a).$$

egenvärdena beräknas. Om alla egenvärden är > 0 så har vi lok. min i a.
Och så vidare.

Obs att Hesse-matrisen är Jacobi-matrisen till $f'(x)^T$.

Använd ej "Remark" på sid 748. Det är en ointressant handräkningsmetod som bara fungerar då $N = 2$.
(Ger noll poäng på tentan!!)