Fö 3.2 (1

Sats 3 (Andra-derivata-testet)

Antag $a=(a_1 \ldots a_n)$ en kritisk punkt till $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, dvs $f'(a)=0$.

(a) $f''(a)$ pos. def. (alla $\lambda_j > 0$) $\Rightarrow$ lok. min. i a

(b) $f''(a)$ neg. def. (alla $\lambda_j < 0$) $\Rightarrow$ lok max i a

(c) $f''(a)$ indefinit (något $\lambda_j > 0$, något $\lambda_i < 0$) $\Rightarrow$ sadelpunkt i a.

(d) $f''(a)$ ej pos., neg. eller indefinit (alla $\lambda_j \geq 0$ med något $\lambda_i = 0$ eller alla $\lambda_j \leq 0$ med något $\lambda_i = 0$)

$\Rightarrow$ ingen information

I fall (d) är $f''(a)$ pos. eller neg. semidefinit.

Metod för undersökning av kritiska punkter. (Datorövning 3)

1) Kritiska punkter ges av ekv. systemet

$$f'(x)^T = 0$$ (kolonn-matris)

Löses med Newtons metod.

Skriv funktionsfil funk1.m för $y=f(x)$.

Skriv funktionsfil gradfunk1.m som beräknar $g=f'(x)^T$ med funk1.m och jacobi.m.

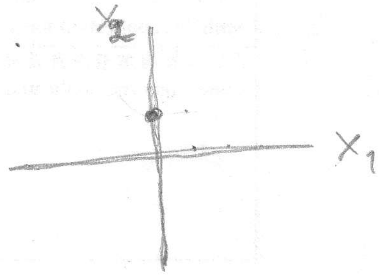
2) För varje kritisk punkt beräknas Hesse-matrisen $f''(a)$. Detta är Jacobi-matrisen till $f'(x)^T$ i a. Sedan beräknas egenvärdena.

Exempel $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$

1) Kritiska punkter ges av:

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^3 \\ 3x_1^2 x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning: $x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$.



dvs kritiska punkter på hela x_1-axeln och hela x_2-axeln.

2) Hesse-matrisen:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_2^3 & 6x_1 x_2^2 \\ 6x_1 x_2^2 & 12x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

Några kritiska punkter:

a) $a = (0,1)$, $f''(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

Fall (d), ingen info. $f(0,1) = 0$.

Vad är det då? Nära $a = (0,1)$: $f(s, 1+t) = s^2(1+t)^3 \geq 0 = f(0,1)$ för alla små s, t.

Lokalt minimum.

b) $a = (0,0)$ $f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ingen info. $f(0,0) = 0$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1, x_1) = x_1^5 \begin{cases} > 0 & x_1 > 0 \\ < 0 & x_1 < 0 \end{cases}$ Sadelpunkt.

Exempel 6 $\quad f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} 2xy - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 2yz = 0 & (2) \\ y^2 + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) ger $\quad z = -\frac{y^2}{2}$

Insättes i (2): $\quad x^2 + 2y\frac{(-y^2)}{2} = 0$

$$x^2 = y^3, \quad y = x^{2/3}$$

Insättes i (1): $\quad x \cdot x^{2/3} = 1, \quad x = 1$

Sedan $\quad y = 1, \quad z = -\frac{1}{2}$

En kritisk punkt: $\quad (1, 1, -\frac{1}{2})$.

Hesse-matrisen:

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y & 2 & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{bmatrix}$$

$$f''(1,1,-\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvärden: ges av

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{(-1-\lambda)(2-\lambda)-4} - 2\cdot 2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\Big((-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 - 4\Big) = 0$$

$2 - \lambda = 0$ eller $\quad \lambda^2 - \lambda - 10 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 10}$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 10} > 0$

$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 10} < 0$

Olika tecken: sadelpunkt.

13.2 Extremvärden i begränsade områden

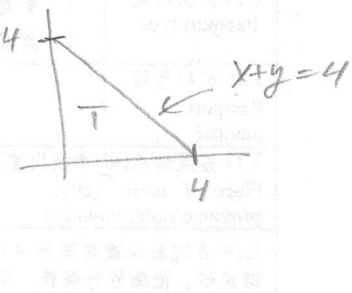
Metod

1) Bestäm alla kritiska och singulära punkter i det inre av D_f.

2) Bestäm extrempunkter på randen av D_f.

3) Jämför f mellan dessa punkter.

Exempel 2 Bestäm extremvärdena för $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ i triangeln T.



1) Singulära punkter: inga.
Kritiska punkter ges av:

$$\begin{cases} 2xy\,e^{-(x+y)} + x^2 y\,e^{-(x+y)} \cdot (-1) = 0 \\ x^2 e^{-(x+y)} + x^2 y\,e^{-(x+y)}(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(2-x)=0 & (1) \\ x^2(1-y)=0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\iff$ $x=0$ eller $y=0$ eller $x=2$

(2) $\iff$ $x=0$ eller $y=1$

Kritiska punkter: $(0,y)$ och $(2,1)$.

Endast $(2,1)$ är inre punkt till T.

$f(2,1) = 4e^{-3}$

2) På randen $x=0$: $f(0,y)=0$

På randen $y=0$: $f(x,0)=0$

På randen $\begin{cases} x+y=4 \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$: $f(x,4-x) = x^2(4-x)e^{-(x+4-x)}$
$= x^2(4-x)e^{-4}$

$$g(x) = x^2(4-x)e^{-4} = (4x^2-x^3)e^{-4}$$

$$g'(x) = (8x-3x^2)e^{-4} = x(8-3x)e^{-4} = 0$$

$x=0$ eller $x=\frac{8}{3}$, $\quad 4-\frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$

Obs: $g(0)=0$, $g(4)=0$ (ändpunkterna)

$$f\left(\tfrac{8}{3},\tfrac{4}{3}\right) = \frac{64\cdot 4}{27}e^{-4} = \frac{256}{27}e^{-4}$$

3) Jämför: $f(0,y)=0=f(x,0)=0$

$f(2,1) = 4e^{-3} \approx 0.199$

$f\left(\tfrac{8}{3},\tfrac{4}{3}\right) = \frac{256}{27}e^{-4} \approx 0{,}174 < f(2,1)$

Max $= f(2,1)$

Min $= 0$ antas på randen $x=0$ och rand $y=0$.

Datorövning 3

Undersök kritiska punkter
för $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = 0.$$

Skriv funktionsfil funk1.m
som implementerar $y = f(x)$.

Skriv funktionsfil gradfunk1.m
som implementerar $g = f'(x)^T$
med hjälp av jacobi.m och funk1.m.

Lös $f'(x)^T = 0$ med newton.m
och gradfunk1.m.

Beräkna Hesse-matrisen
med jacobi.m och gradfunk1.m.

Gör Exempel 6 i Matlab!