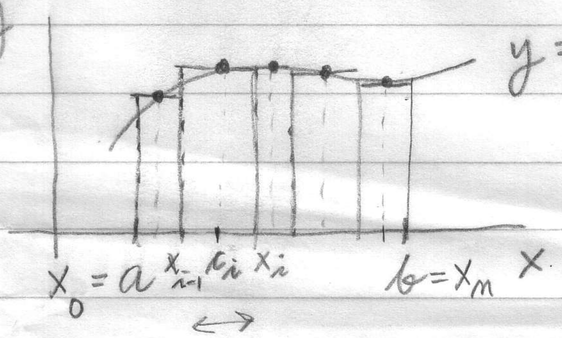
1

FÖ 4.2

14.1 Dubbelintegralen

Kom ihåg enkelintegralen (Adams 5.3):



Nät: $a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$

$\|P\| = \max \Delta x_i$

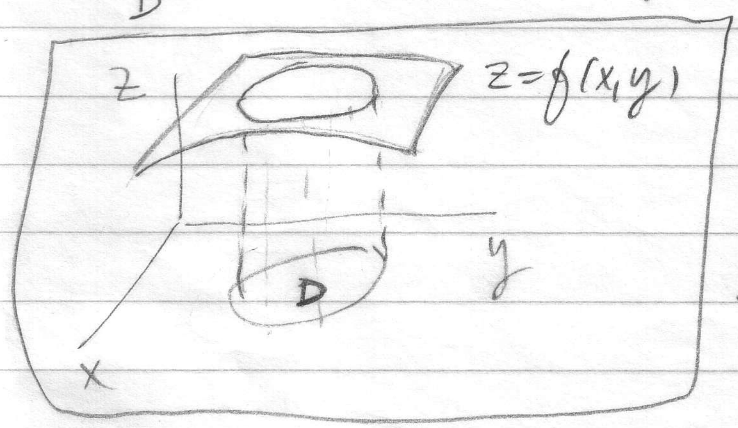
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$ (Riemann-summa)

= arean under grafen om $f(x) \geq 0$.

Vi ska nu definiera dubbelintegralen:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \text{volymen under grafen } z = f(x,y)$$

om $f(x,y) \geq 0$.

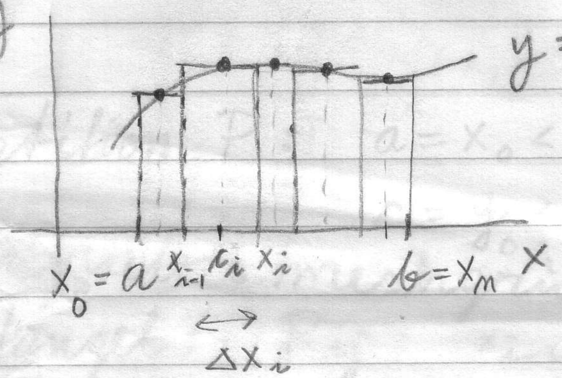


basen D
höjden z

FÖ 4.2

14.1 Dubbelintegralen

Kom ihåg enkelintegralen (Adams 5.3):



Nät: $a = x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

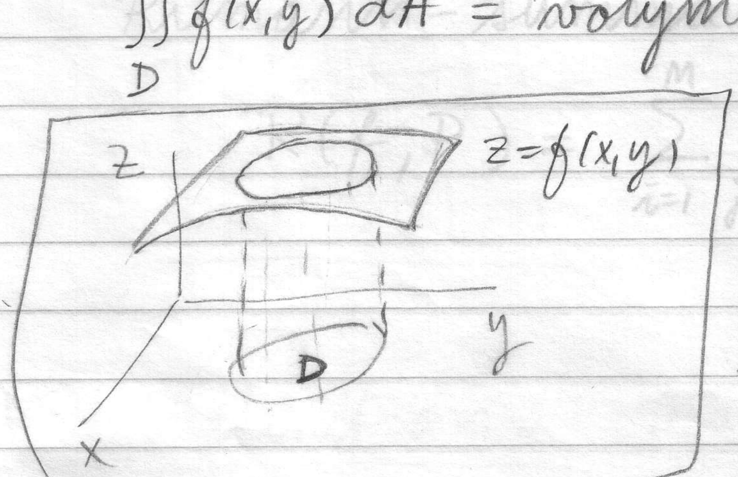
$\|P\| = \max \Delta x_i$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad \text{(Riemann-summa)}$$

= arean under grafen om $f(x) \geq 0$.

Vi ska nu definiera dubbelintegralen:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \text{volymen under grafen } z = f(x,y)$$

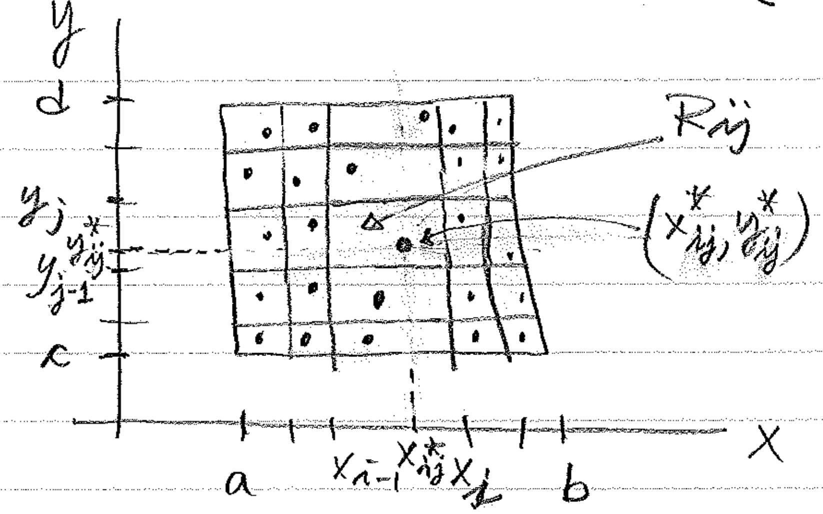


om $f(x,y) \geq 0$.

basen D

höjden z

Rektangel $D =$
$= \{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$



Partition P: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{M-1} < x_M = b$
$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{N-1} < y_N = d$
(Matlab: meshgrid)

Rektangel: R_{ij} : $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{j-1} \le y \le y_j$

Area: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$

Diameter: $\mathrm{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$

Norm: $\|P\| = \max \mathrm{diam}(R_{ij})$

Godtycklig punkt: $(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \in R_{ij}$

Riemann-summa:

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta A_{ij}$$

Definition 1

Funktionen f är integrerbar över rektangeln D med dubbelintegralen

$$I = \iint_D f(x,y)\,dA$$

om gränsvärdet

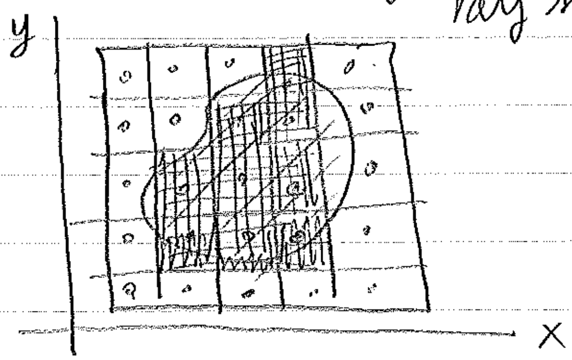
$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f,P) = I$$

existerar för varje val av punkter $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$.

Obs: area-elementet $dA = dx\,dy = dy\,dx \approx \Delta x_i \Delta y_j$

Allmänt begränsat område:

Välj stor rektangel R så att $D \subset R$.



Bilda funktionen

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Definition 2 Dubbelintegralen över allmänt begränsat område

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dA$$

Egenskaper

a) $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$ om area $(D) = 0$

b) $\text{area}(D) = \iint_D 1\,dA$

c) volym: om $f(x,y) \geq 0$ på D

så är $\iint_D f(x,y)\,dA$ = volymen

under grafen $z = f(x,y)$.

d) om $f(x,y) \leq 0$ så är $\iint_D f(x,y)\,dA$ = − volymen

e) linjär kombination bevaras:

$$\iint_D \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,dA =$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y)\,dA + \beta \iint_D g(x,y)\,dA$$

f) olikhet bevaras: $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$$

g) triangelolikheten: $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$

h) additivitet av områden: $D = D_1 \cup D_2$ ej överlapp

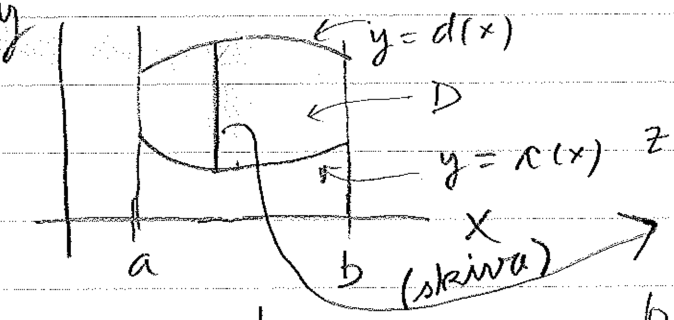
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

14.2 Beräkning av dubbelintegralen med upprepad integration.

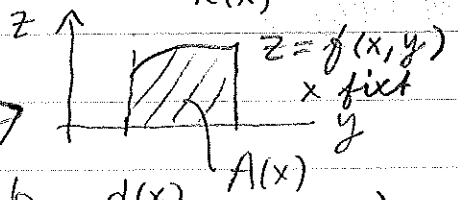
Denna metod fungerar om området D är enkelt i x eller y.

enkelt i y: $a \le x \le b$, $c(x) \le y \le d(x)$

D är området mellan två grafer



$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

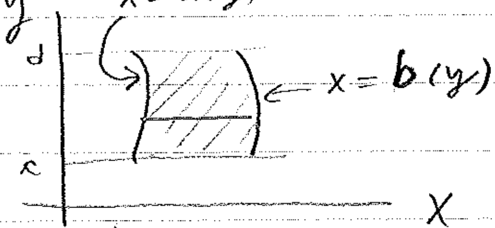


$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$= \{$ skrivs ofta utan parenteser $\}$

$$= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

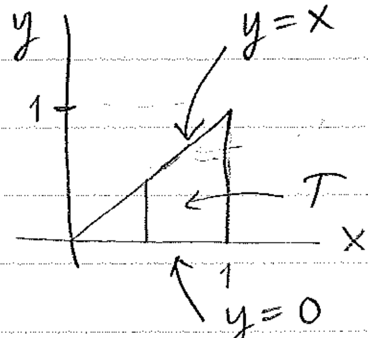
Enkelt i x:



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ej enkelt i y:  dela upp: 

Exempel. Beräkna $\iint_T xy\,dA$.



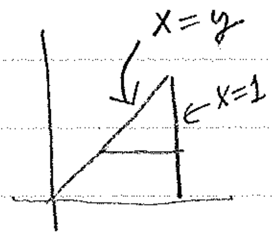
Triangeln T är
både enkel i x och y.

$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \int_0^x y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{8}$$

$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy \quad dy$$



$$= \int_0^1 y \int_y^1 x\,dx\,dy = \int_0^1 y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 y\,\frac{1-y^2}{2}\,dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^3)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}.$$

F 3.3 8)

14.3 • Generaliserad dubbelintegral.
(improper)

• Medelvärdessatsen

Integralen $\iint_D f(x,y)\,dA$ är definierad om f är kontinuerlig och begränsad och D är ett begränsat område.

Dvs om både f och D "håller sig borta från oändligheten".

Om någon av dem är obegränsad så säger vi att $\iint_A f(x,y)\,dA$ är generaliserad (improper).

En sådan kan vara konvergent eller divergent.

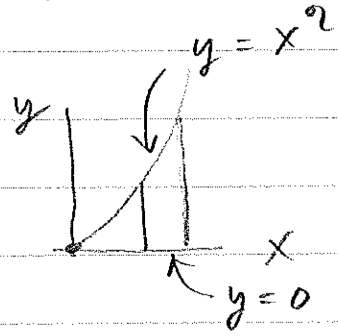
Positiv integrand $f(x,y) \geq 0$.

Om integranden $f(x,y) \geq 0$
så är integralen antingen
konvergent: $\iint_D f(x,y)\,dA = I$
eller **divergent mot ∞:**

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \infty .$$

- Då kan man avgöra konvergens/divergens genom upprepad integration.
- Om $f(x,y)$ har både pos. och negativa värden så funkar inte detta: $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ och $\iint f(x,y)\,dy\,dx$ kan ge olika resultat.

Exempel 3 $\quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$



$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2} \geq 0$$

$$f(x,y) \to \infty \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx =$$

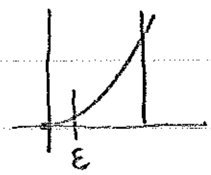
$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln(1+x) \Big]_{x=0}^{1} = \ln 2.$$

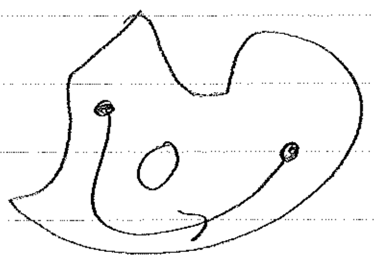
Konvergent. Egentligen borde vi räkna så här:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$$

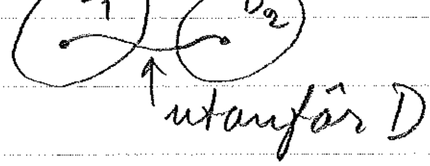


Medelvärden

D är sammanhängande (connected) om två godtyckliga punkter i D alltid kan förbindas med en kurva i D.



$D = D_1 \cup D_2$



(Medelvärdessats för integral)

Sats 3 Antag: • D slutet, begränsat och sammanhängande område

• f kont. i D

Då finns punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)\cdot \text{area}(D)$$

Utan bevis.

Dividera med arean:

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dA =$$

$=$ medelvärdet av f över D.

Dvs f kan inte hoppa över sitt medelvärde.