FÖ 5.2 (2007-08)

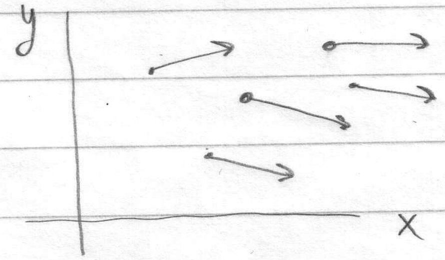
15.1 Vektorfält (endast sid 842-846)

Vektorfält i rummet:

$$\bar{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\bar{i} + F_2(x,y,z)\,\bar{j} + F_3(x,y,z)\,\bar{k}$$

Vektorfält i planet:

$$\bar{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\bar{i} + F_2(x,y)\,\bar{j}$$



(I varje punkt sitter en pil.)

Skalärt fält: $f(x,y,z)$

exempel
- hastighetsfält i strömning

$$\bar{v}(x,y,z) \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

- temperaturgradient

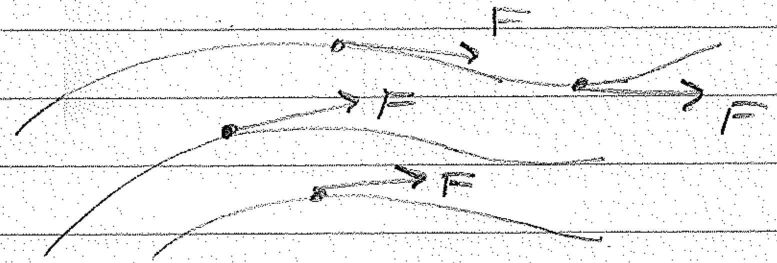
$$\bar{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\bar{k} \quad \left[\frac{K}{m}\right]$$

- kraftfält $\bar{F}(x,y,z)$ $[N]$

$\bar{F} = -mg\bar{k}$
tyngdkraftfältet

Fältlinjer (strömlinjer, kraftlinjer)

Dessa är kurvor sådana att $\bar{F}(x,y,z)$ är tangent till den kurvan som går genom (x,y,z).



En sådan kurva

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

ges av att $\frac{d\bar{r}}{dt}$ är parallell med $\bar{F}(\bar{r}(t))$:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lambda(t)\,\bar{F}(\bar{r}(t))$$

Genom att välja $\lambda(t)$ kan vi ändra farten.

$$\begin{cases} \text{Utan } \lambda \text{ med parameter } s: & \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{F} \\ \text{Ny parameter } t: & s = g(t),\ \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \lambda(t)\bar{F} \\ & g'(t) = \lambda(t) \end{cases}$$

Detta är ett system av ODE. Löses med Matlab (my-ode.m, ode23.m)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(t) F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(t) F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dz}{dt} = \lambda(t) F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

En annan metod är att eliminera t:

$$\lambda(t)\,dt = \frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

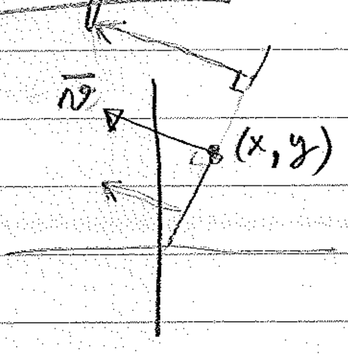
dvs $$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

Om man kan separera variablerna, dvs skriva på formen

$$P(x)\,dx = Q(y)\,dy = R(z)\,dz ,$$

så kan man bestämma flödeslinjerna genom att integrera.

Exempel $\bar{v}(x,y) = \Omega(-y\bar{i} + x\bar{j})$



$$v = |\bar{v}| = \Omega\sqrt{y^2+x^2} = \Omega r$$

$$\bar{v}\cdot\bar{r} = 0$$

Hastighetsfältet för stelkroppsrotation. Flödeslinjerna ges av

med vinkelhastighet Ω

$$\frac{dx}{-\Omega y} = \frac{dy}{\Omega x} \quad \text{dvs} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

Separera variablerna:

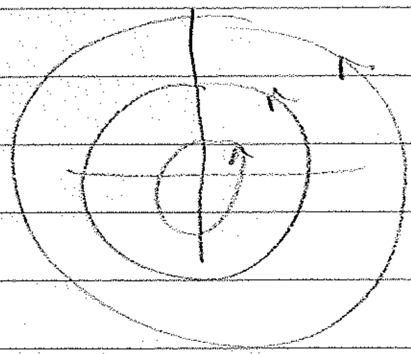
$$x\,dx = -y\,dy$$

Integrera:

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Cirklar med centrum i origo.

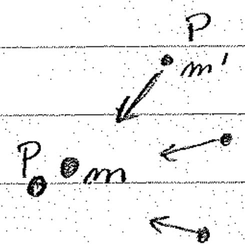


15.2 Konservativa fält

(endast sid 849-851)

<u>Definition</u> Om $\bar{F}(x,y,z) = \bar{\nabla}\phi(x,y,z)$ i D så är $\bar{F}$ ett konservativt vektorfält i D och funktionen ϕ kallas potential till $\bar{F}$.

<u>Exempel</u> Gravitationsfält



$$\bar{F}(\bar{r}) = -Gmm' \frac{\bar{r}-\bar{r}_0}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}$$

$$|\bar{F}(\bar{r})| = Gmm' \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}$$

Kraften på massan m' i P som rör sig kring den fixa massan m i P_0.

I mekaniken (och elläran) skriver man $\bar{F} = -\bar{\nabla}\phi$, så att kraften pekar dit potential minskar.

Potentialen är

$$\phi(\bar{r}) = \frac{G m m'}{|\bar{r} - \bar{r}_0|}$$

Bevis: Vi beräknar $\bar{\nabla}\phi$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = G m m' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} =$$

$$= G m m' \frac{-1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^2} \frac{\partial}{\partial x} |\bar{r} - \bar{r}_0|$$

Når är

$$\frac{\partial}{\partial x} |\bar{r} - \bar{r}_0| = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{}} \, 2(x - x_0) = \frac{x - x_0}{|\bar{r} - \bar{r}|}$$

så att

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - G m m' \frac{x - x_0}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^3} = F_1$$

På samma vis:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - G m m' \frac{y - y_0}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^3} = F_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = - G m m' \frac{z - z_0}{|\bar{r} - \bar{r}_0|^3} = F_3 \qquad \square$$

Nödvändigt villkor för att $\bar{F}$ ska vara konservativt i D

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

dvs $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ i D

På samma vis

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{i D}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{i D}.$$

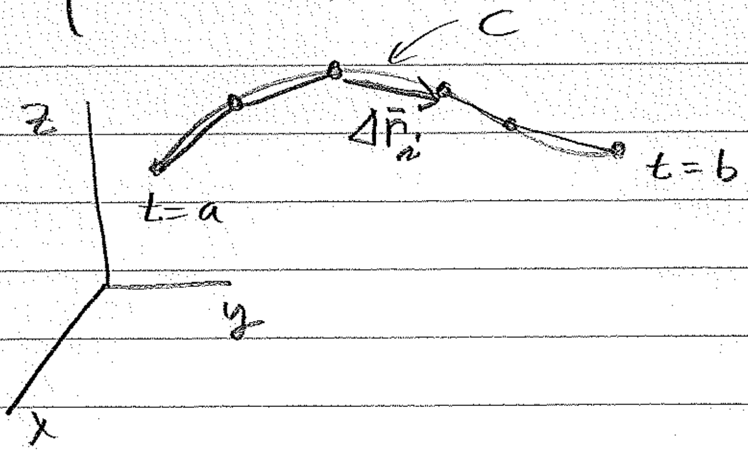
Dessa är nödvändiga men inte tillräckliga. Vi ska se i (16.2 Sats 4) att vi måste lägga till ett villkor på D för att garantera att $\bar{F}$ är konservativt.

15.3 Kurvintegral

Kurva C på parameterform:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \quad t \in I$$

eller
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I = (a, b)$$



$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{|\Delta \bar{r}| \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,|\Delta \bar{r}_i|$$

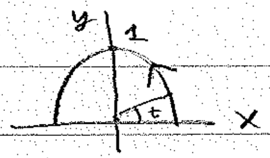
$$= \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \left| \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

båglängdselementet $\quad ds = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

__Exempel__ Beräkna $\int_C y\,ds$ där

C är övre halvan av cirkeln $x^2+y^2=1$.



Lösning. 1) Parametrisera C:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

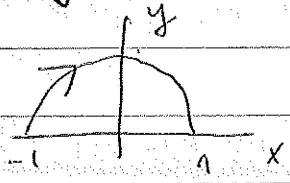
Tangent: $\frac{d\bar{r}}{dt} = -\sin(t)\,\bar{i} + \cos(t)\,\bar{j}$

Båglängds-element: $ds = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$

$$= \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt = dt$$

$$\int_C y\,ds = \int_0^{\pi} \sin t\,dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = 2$$

2) En annan parametrisering: $t = x$



$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad -1 \le t \le 1$$

Tangent: $\frac{d\bar{r}}{dt} = 1\,\bar{i} + \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\bar{j}$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \sqrt{1+\left(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_C y\,ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{1} dt = 2.$$

Viktigt: $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t))\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|dt$

är oberoende av parametriseringen,
dvs alla parametriseringar av C
ger samma resultat.
Vi bevisar inte detta.
Men vi såg att det stämmer
i föregående exempel.

Kurvan C och $\int_C f\,ds$ har
ingen riktning i sig själv.
Men när vi valt en parametri-
sering så genomlöps kurvan
i en viss riktning som
bestäms av parametriseringen.
Se föregående exempel.
Även farten bestäms av parametriseringen.