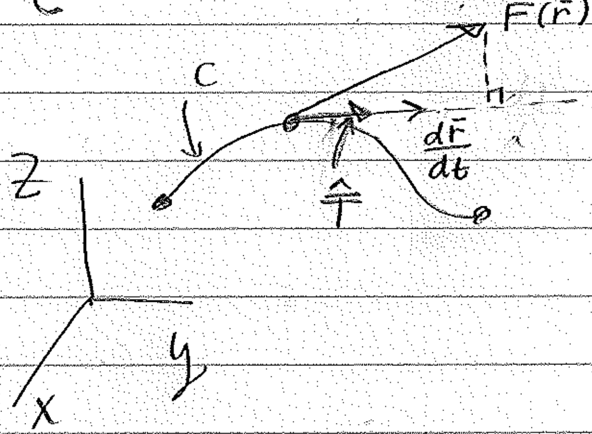
Fö 6.1

15.4 Tangentkurvintegral

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt$$



Obs att $\displaystyle\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}) \cdot \underbrace{\frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|}}_{=\hat{T}=} \underbrace{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt}_{ds}$

= enhetstangenten

$$= \int_C \bar{F} \cdot \hat{T}\, ds$$

där $\bar{F} \cdot \hat{T}$ är skalära projektionen av $\bar{F}$ på tangentriktningen.

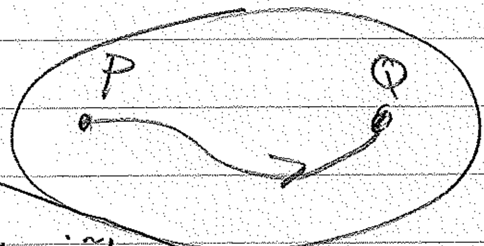
Vektorbåglängdselementet: $d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt = \hat{T}\, ds$

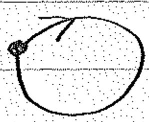
Exempel $\bar{F}$ kraftfält. Arbetet som uträttas då en partikel rör sig längs C i kraftfältet $\bar{F}$ är

$$W = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_C \bar{F} \cdot \hat{T}\, ds$$

W = kraftens komponent i rörelseriktningen gånger sträckan.

D är ett sammanhängande område (i rummet eller planet) om varje par av punkter P, Q i D kan förbindas med en kurva i D.

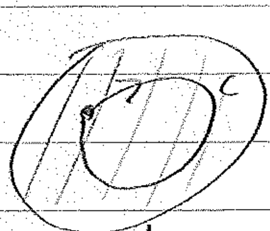


C sluten = 

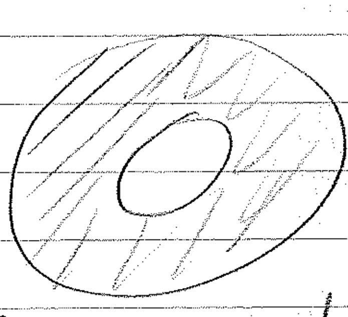
C enkel = korsar inte sig själv

D är enkelt sammanhängande om varje enkel sluten kurva i D kan krympas kontinuerligt till en punkt utan lämna D.

Då finns en yta i D vars rand är C.

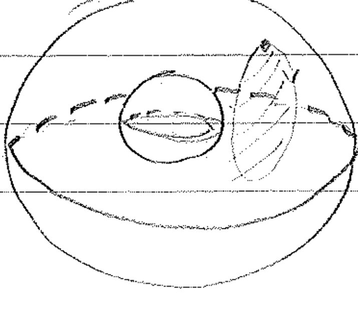


enkelt sammanhängande

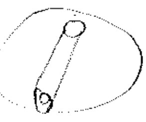


hålskiva i planet

är sammanhängande men ej enkelt



klot med hål i rummet är enkelt sammanhängande



genomborrat klot är ej enkelt sammanhängande

(3

Sats 1 (Oberoende av vägen)

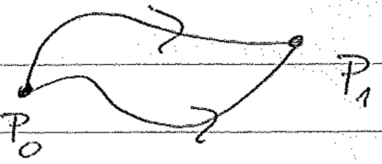
Antag D är enkelt sammanhängande och $\bar{F}$ ett vektorfält i D.

Då är följande påståenden ekvivalenta.

a) $\bar{F}$ är konservativt i D

b) $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ för varje sluten kurva C i D

c) För varje par av punkter P_0, P_1 i D har $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ samma värde för alla kurvor C i D från P_0 till P_1.



Vi bevisar endast att a) $\Rightarrow$ c).

Antag då att a) är sant, dvs $\bar{F} = \bar{\nabla}\phi$ i D.

Tag kurva C i D från P_0 till P_1.

Då blir $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{\nabla}\phi(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt =$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\, \phi(\bar{r}(t))\, dt = \Big[\phi(\bar{r}(t))\Big]_{t=a}^{b} =$$

$$= \phi(\bar{r}(b)) - \phi(\bar{r}(b)) = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

dvs den beror bara av ändpunkterna men inte C.

Arbetet av konservativt kraftfält är ändringen i potentialen
$W = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$

Flytta till sidan 5!

<u>Exempel</u> Graf $z = f(x,y)$.

Välj parametrar $u = x$, $v = y$.

Parametrisering:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

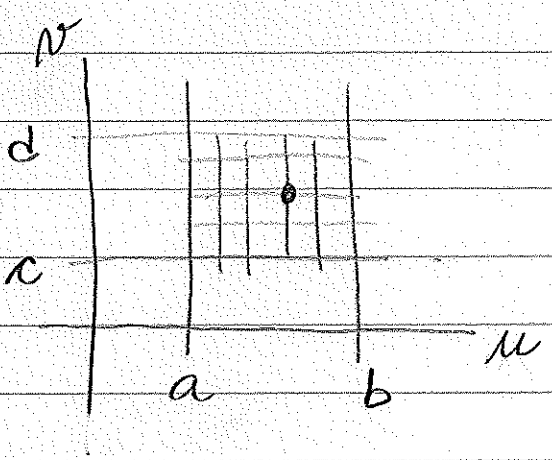
15.5 Ytintegral. (endast sid 870-878)

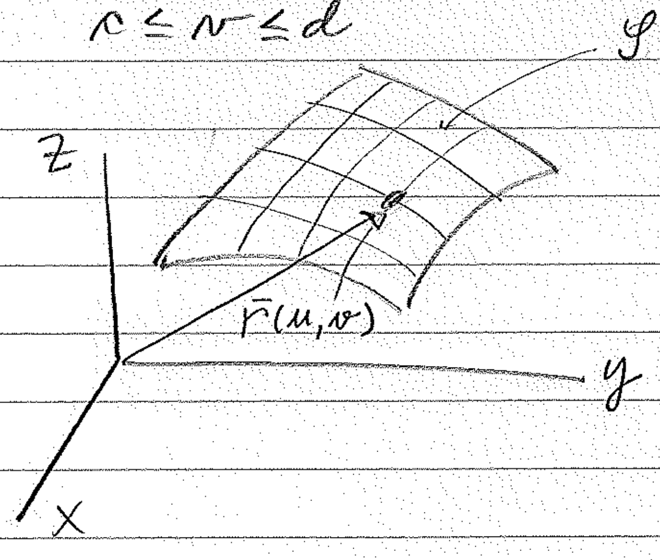
Ytan S på parameterform:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \qquad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

eller

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \begin{matrix} a \le u \le b \\ c \le v \le d \end{matrix}$$





exempel Sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

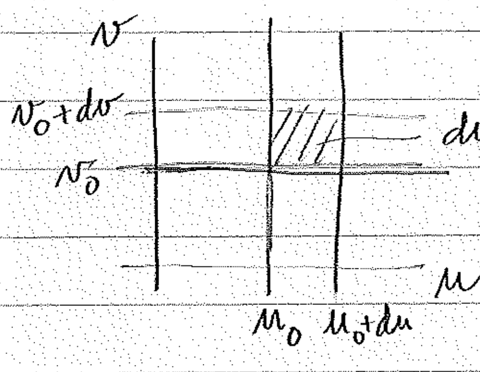
I sfäriska koordinater: $\begin{cases} \rho = R \\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$

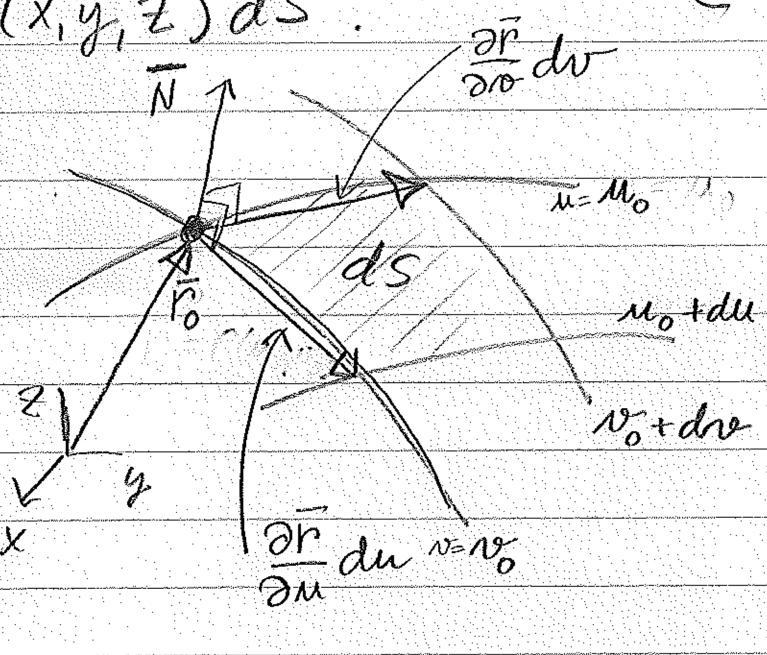
Parametrisering:

$$\begin{cases} x = R \sin\phi \cos\theta \\ y = R \sin\phi \sin\theta \\ z = R \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$$

exempel Graf se sid 4.

Ytintegral $\iint_S f(x,y,z)\,dS$.





Areaelementet:

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

Obs att $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ och $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$

är tangenter till koordinatkurvorna

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v_0), \quad a \le u \le b \quad (v = v_0)$$

$$\bar{r} = \bar{r}(u_0, v), \quad c \le v \le d \quad (u = u_0)$$

De är då också tangenter till ytan S i punkten $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$.

En normalvektor:

$$\bar{N} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Exempel   Graf: $z = f(x,y)$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

Tangenter: $$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \bar{i} + 0\bar{j} + f'_x(u,v)\bar{k} \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} = 0\bar{i} + \bar{j} + f'_y(u,v)\bar{k} \end{cases}$$

En normalvektor

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x\bar{i} - f'_y\bar{j} + \bar{k}$$

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du\,dv =$$

$$= \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, du\,dv$$

eller $$dS = \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}\, dx\,dy$$

Exempel Sfären

$$\begin{cases} x = R \sin\phi \cos\theta \\ y = R \sin\phi \sin\theta \\ z = R \cos\phi \end{cases}$$

Tangenter:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} = R\cos\phi \cos\theta\, \bar{i} + R\cos\phi \sin\theta\, \bar{j} - R\sin\phi\, \bar{k} \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -R\sin\phi \sin\theta\, \bar{i} + R\sin\phi\cos\theta\, \bar{j} + 0\, \bar{k} \end{cases}$$

En normalvektor:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ R\cos\phi\cos\theta & R\cos\phi\sin\theta & -R\sin\phi \\ -R\sin\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \sin^2\phi \cos\theta\, \bar{i} + R^2 \sin^2\phi \sin\theta\, \bar{j} +$$

$$+ \left(R^2 \sin\phi\cos\phi\cos^2\theta + R^2 \sin\phi\cos\phi\sin^2\theta \right) \bar{k}$$

$$= 1$$

$$= R \sin\phi \left(R\sin\phi\cos\theta\, \bar{i} + R\sin\phi\sin\theta\, \bar{j} + \right.$$

$$\left. + R\cos\phi\, \bar{k} \right)$$

$$= R^2 \sin\phi\, \bar{r}$$

$$dS = | R^2 \sin\phi\, \bar{r} |\, d\phi\, d\theta = R^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

Kom ihåg $dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$. $\left\{ \begin{matrix} \rho = R \\ \cancel{d\rho = 0} \end{matrix} \right\}$

<u>Exempel</u> Sfärens area

$$\iint_S dS = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= R^2 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

<u>Viktigt</u>: kunna <u>parametrisera</u>

och <u>beräkna</u> $\bar{N} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$

och dS i följande fall

- graf $z = f(x, y)$
- cylindriska koordinater
- sfäriska koordinater

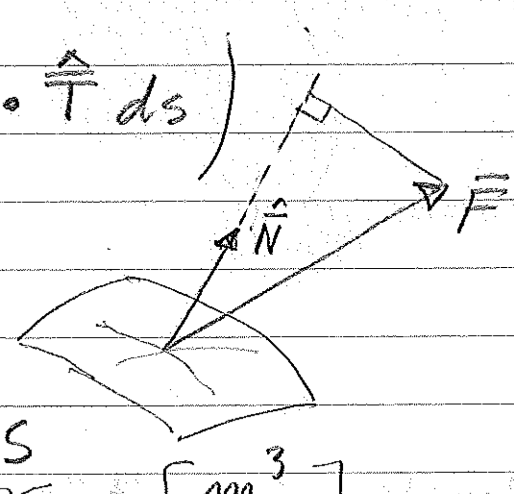
15.6 Flödesintegral

En yta är orienterbar om det finns en normalvektor $\bar{N}(P)$ som varierar kontinuerligt när P rör sig på ytan.
(Möbius band är ej orienterbar.)

Om $\mathcal{S}$ är orienterbar så definierar vi flödesintegralen (normalytintegralen) ("flux")

$$\iint_{\mathcal{S}} \bar{F} \bullet d\bar{S} = \iint_{\mathcal{S}} \bar{F} \bullet \hat{N}\, dS$$

(Jämför: $\int_C \bar{F} \bullet d\bar{r} = \int_C \bar{F} \bullet \hat{T}\, ds$)



$\bar{F} \bullet \hat{N} = \underset{= \text{normalkomponenten}}{\text{skalära proj.}}$

Hastighetsfält: $\iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\bar{v}}_{\left[\frac{m}{s}\right]} \bullet \hat{N} \underbrace{dS}_{[m^2]} \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$

volymflöde

$$\iint_S \underbrace{\delta}_{\frac{kg}{m^3}} \underbrace{\bar{v}}_{\frac{m}{s}} \cdot \hat{N} \underbrace{dS}_{m^2} = \text{massflöde} \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

$\delta \bar{v}$ massflödestäthet $\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$