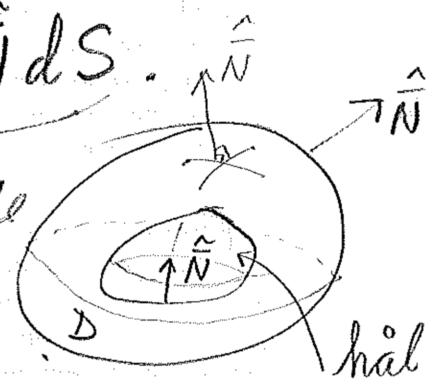
FÖ 8.1 Integralsatser

16.4 Sats 8 Divergenssatsen (Gauss sats)

Antag att D är ett område i rummet $\mathbb{R}^3$ vars rand är en styckvis glatt orienterad yta $\mathcal{S}$ med utåtriktat normalvektorfält $\hat{N}$. Om $\bar{F}$ är ett glatt vektorfält i D, så gäller

$$\iiint_D \underbrace{\bar{\nabla}\bullet\bar{F}}_{=\text{divergens}}\, dV = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} \bar{F}\bullet\hat{N}\, dS}_{=\text{flöde}} .$$



(utan bevis)

Detta är en 3-D version av fundamentalsatsen:

$$\int_a^b Df(x)\, dx = \left[f(x)\right]_a^b .$$

Förklaringar:

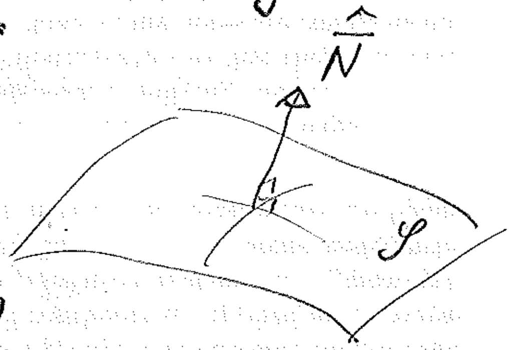
glatt (smooth) = tillräckligt deriverbar.

- för $\bar{F}$: $\bar{\nabla}\cdot\bar{F}$ ska vara kontinuerlig så att $\iiint_D \bar{\nabla}\cdot\bar{F}\,dV$ existerar

- för S: $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$, och tangenterna $\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}$ ska vara kontinuerliga så att $\hat{N}=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)\Big/\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right|$ och $\hat{N}\,dS=\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)du\,dv$ existerar.

(15.6 sid 881)

En orienterbar yta S har ett enhets-normalvektorfält $\hat{N}$ som varierar kontinuerligt över S. Fältet $\hat{N}$ definierar en orientering av S, dvs en positiv sida och en negativ sida.



Möbius band är ej orienterbar.

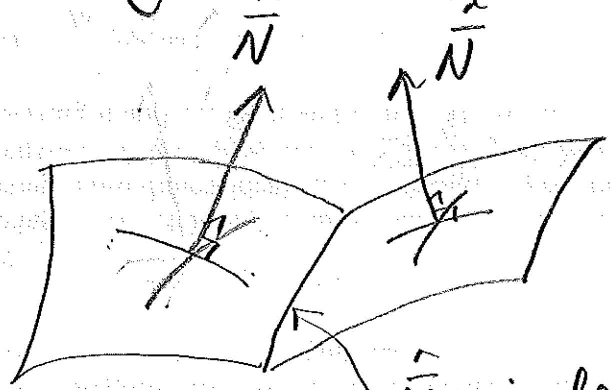
En orienterad yta är en yta tillsammans med ett val av orientering.

Detta behövs för att flödesintegralen

$$\iint_S F \cdot \hat{N} \, dS$$

ska existera.

En <u>styckvis</u> <u>glatt</u> <u>orienterad</u> yta är hopskarvad av glatta orienterade ytor så att orienteringarna "passar ihop"!



$\hat{N}$ ej definierad på skarven

I boken står det

$$\iiint_{D} \operatorname{div} \bar{F}\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} F \cdot \hat{N}\, dS$$

- $\oiint_{\mathcal{S}}$ betyder integral över <u>sluten</u> (closed) yta. Onödig beteckning.
- $\underbrace{\operatorname{div} \bar{F}}_{\text{dålig beteckning}} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F}$

(5a

Exempel 2

$\oiint$ betyder att det är en sluten yta

Beräkna $\oiint_S (x^2+y^2)\,dS$ där

S är sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Vi ser genast: $\hat{N} = \hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{\bar{r}}{a}$

Hitta på $\bar{F}$ så att $\bar{F} \cdot \hat{N} = x^2+y^2$.

Tag $\bar{F} = a(x\bar{i} + y\bar{j})$. Då blir

$$\bar{F} \cdot \hat{N} = a(x\bar{i} + y\bar{j}) \cdot \frac{1}{a}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$$

$$= x^2+y^2$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = a\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = 2a.$$

Gauss sats:

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \iint_S \bar{F} \cdot \hat{N}\,dS =$$

$$= \iiint_D \bar{\nabla} \cdot \bar{F}\,dV = 2a \iiint_D dV =$$

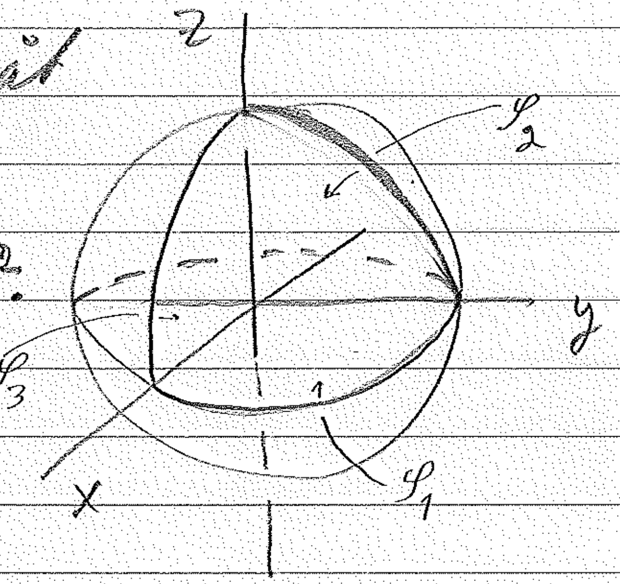
$$= 2a \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}$$

Adams Exercise

16.4:12 $\mathbb{F} = (y + xz)\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} - (2x + z^2)\mathbf{k}$

$\nabla \cdot \mathbb{F} = z + 1 + z - 2z = 1$

Beräkna flödet uppåt genom första oktanten $\mathcal{S}$ av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Alltså: $\iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$

På $\mathcal{S}$: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$\hat{\mathbb{N}} = \frac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|}$, $dS = a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$

$\iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$ för krångligt

Divergenssatsen: D = första oktanten av klotet

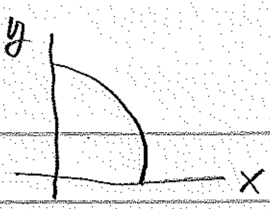
$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

$$+ \iint_{\mathcal{S}_3} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

Här är $\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iiint_D dV = V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}$

$= \frac{\pi a^3}{6}$

5c



På S_1: $z=0$, $\hat{N} = -\mathbb{k}$

$\mathbb{F}\cdot\hat{N} = +2x$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $dS = r\,dr\,d\theta$

$$\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{S_1} 2x\,dS = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^a r\cos\theta\; r\,dr\,d\theta = 2\frac{a^3}{3} = 2\frac{a^3}{3}$$

På S_2: $x=0$, $\hat{N} = -\mathbb{i}$

$\mathbb{F}\cdot\hat{N} = -y$

$$\iint_{S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = -\iint_{S_2} y\,dS = \text{samma räkning} = -\frac{a^3}{3}$$

På S_3: $y=0$, $\hat{N} = -\mathbb{j}$

$\mathbb{F}\cdot\hat{N} = 0$

$$\iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = 0$$

Alltså:

$$\iint_{S} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \pi\frac{a^3}{6} - \frac{2a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = (\pi-2)\frac{a^3}{6}$$

<u>Sats 9</u> (Varianter av Gauss sats.)

$$\iiint_D \bar{\nabla} \times \bar{F}\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \hat{\bar{N}} \times \bar{F}\, dS = -\iint_{\mathcal{S}} \bar{F} \times \hat{\bar{N}}\, dS$$

$$\iiint_D \bar{\nabla}\phi\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi \hat{\bar{N}}\, dS$$

De <u>viktiga</u> användningarna av Gauss sats är:

1) härledning av värmelednings-ekvationen (och andra PDE):

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f$$

2) partiell integration (grunden för FEM):

$$\iiint_D \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{F})\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \hat{\bar{N}} \cdot \bar{F} \phi\, dS - \iiint_D \bar{F} \cdot \bar{\nabla}\phi\, dV$$

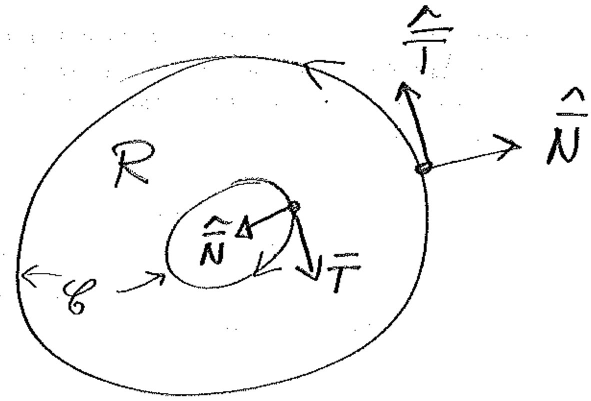
16.3 Adams bevisar Gauss sats genom att först göra Greens sats i planet. Detta är inte så viktigt för oss.

Sats 6 Greens sats i planet

$$\iint_R (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \cdot \bar{k} \, dA = \oint_{\mathscr{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

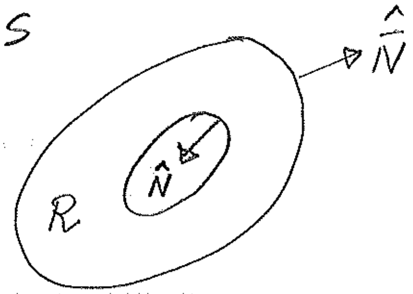
$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathscr{C}} F_1 dx + F_2 dy$$

$\mathscr{C}$ är positivt orienterad med avseende på R



Sats 7 Gauss sats i planet

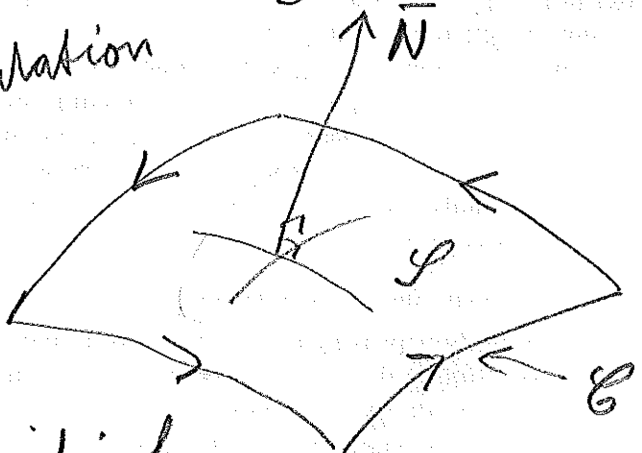
$$\iint_R \bar{\nabla} \cdot F \, dA = \oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot \hat{N} \, ds$$



16.5

Sats 10 Stokes sats

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}}_{=\text{cirkulation}} = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{(\bar{\nabla} \times \bar{F})}_{=\text{rotation}} \cdot \hat{N} \, dS$$



$\mathcal{C}$ är positivt orienterad med avseende på $\mathcal{S}$.
(tumregeln)

Detta är en annan variant av fundamentalsatsen.